Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 6 – a.a. 2018-19

Da consegnare: martedì 20 novembre

Esercizio 1. (Manetti, Esercizio 10.6) Dimostrare, come affermato nella Definizione 10.17, che per uno spazio topologico non vuoto X le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. X ha il tipo di omotopia di un punto.
2. Per ogni $p \in X$ l'applicazione costante $f : X \to X$ data da $f(x) = p$, è omotopa all'identità.
3. Esiste $p \in X$ tale che l'applicazione costante $f : X \to X$ data da $f(x) = p$, è omotopa all'identità.

Esercizio 2. (Manetti, Esercizio 10.12.) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to S^n$ due applicazioni continue. Utilizzando l'espressione algebrica

$$\frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}, \quad t \in [0,1]$$

mostrare che se $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$, allora f è omotopa a g.

Esercizio 3. (Manetti, Esercizio 12.32.) Siano $f, g : S^1 \to S^1$ due applicazioni continue tali che $f(x) \neq g(x)$ per ogni x. Provare che f e g sono omotope.

Suggerimento: usare l'esercizio precedente.

Esercizio 4. (Manetti, Esercizio 11.11.) Provare che ogni applicazione continua omotopa ad una costante induce l'omomorfismo nullo tra i rispettivi gruppi fondamentali e cioè, scrivendo con precisione ipotesi e tesi, dimostrare il seguente enunciato:

Lemma. *Sia $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una funzione continua e sia $c : X \to Y$ la funzione costante $c(x) = y_0$.*

Se $f \sim c$ allora $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ è l'omomorfismo nullo che manda ogni elemento di $\pi_1(X, x_0)$ nell'elemento neutro di $\pi_1(Y, y_0)$.

Esercizio 5. (Facoltativo, per riflettere sulla relazione fra successioni e topologia).

Ricordiamo la definizione di *punto di accumulazione di un insieme*: sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $x \in X$ un punto. Si dice che x è un *punto di accumulazione per* A se ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x. (Questa è esattamente la definizione data nel corso di Analisi UNO).

Sia ora X uno spazio topologico, $a : \mathbb{N} \to X$ una successione e poniamo $A = a(\mathbb{N}) \subseteq X$, l'immagine della successione. Sia $p \in X$ e consideriamo le due affermazioni:

1. p è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\} \implies p$ è un punto di accumulazione per l'insieme A

2. p è un punto di accumulazione per l'insieme $A \implies p$ è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\}$

Determinare se le due affermazioni sono vere o false, fornendo una dimostrazione oppure un controesempio.

È possibile rendere vera una affermazione falsa aggiungendo ipotesi sullo spazio X? (per esempio, si potrebbe aggiungere X soddisfa il primo assioma o il secondo assioma di numerabilità, oppure X è compatto oppure X è uno spazio metrico ...)