Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 6 - 12 novembre 2018

Esercizio 1. Siano X e Y spazi topologici contraibili.

1. Dimostrare che lo spazio prodotto $X \times Y$ è contraibile.
2. Supponiamo ora $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ (X e Y sempre contraibili). L'unione $X \cup Y$ è contraibile?

Esercizio 2. Siano X e Y spazi topologici omotopicamente equivalenti. Allora X è connesso per archi se e solo se Y è connesso per archi.

Esercizio 3. Sia $A \subseteq Y$, con Y spazio di Hausdorff. Se A è un retratto di Y, dimostrare che A è chiuso in Y.

Esercizio 4. Dire quali tra questi spazi topologici (con la topologia euclidea) sono tra loro omotopicamente equivalenti, motivando la risposta:

1. $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
2. $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
3. $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$
4. $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Esercizio 5. Siano A e B due sottospazi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea. Dire se la seguente affermazione è vera o falsa, dando una dimostrazione o un controesempio:

se A e B hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i complementari $\mathbb{R}^2 \smallsetminus A$ e $\mathbb{R}^2 \smallsetminus B$ hanno lo stesso tipo di omotopia.

Esercizio 6. Sia $X = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ con determinante non nullo, con la topologia indotta da $\mathbb{C}^{n^2}$.

Determinare un sottoinsieme $Y \subset X$ che sia omeomorfo a S^1 e che sia un retratto di X.

Esercizio 7. Sia X uno spazio topologico e $f : S^1 \to X$ una funzione continua. Dimostrare che f è omotopa ad una funzione costante se e solo se esite una funzione continua $g : D^2 \to X$ tale che $g_{|_{S^1}} = f$.

Esercizio 8. Sia T un toro, sia $P \in T$ e sia $X = T \setminus \{P\}$ il complementare di un punto sul toro. Trovare un sottoinsieme Y di X che sia omeomorfo a una "figura a 8" e sia un retratto forte di X.

Esercizio 9. Dimostrare che il sottoinsieme $S^1 \times \{x_0\}$ è un retratto di $S^1 \times S^1$, ma non è un retratto forte di deformazione. È un retratto di deformazione?