

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 7 – a.a. 2018-19

Da consegnare: martedì 27 novembre

Esercizio 1. (Manetti, Es. 11.1.) Provare che i due cammini $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t)), \quad \beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t))$$

sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 2. (Manetti, Es. 11.17.) Calcolare il gruppo fondamentale del sottospazio di \mathbb{R}^3 unione della sfera S^2 e dei tre piani coordinati (sul libro di Manetti c'è un suggerimento).

Esercizio 3. (Manetti, Es. 12.33.) Dimostrare che \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Esercizio 4. Esiste uno spazio topologico Y tale che $S^1 \times Y$ è omeomorfo alla sfera S^2 ? Esiste Y tale che $S^1 \times Y$ è omeomorfo al piano \mathbb{R}^2 ? Esiste Y tale che $S^1 \times Y$ è omotopicamente equivalente al piano \mathbb{R}^2 ?

Esercizio 5. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

e sia

$$X = A \cup C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

(X è detto il “pettine”). Dimostrare che:

1. X è contraibile
2. il punto $P = (0, 0)$ è un retratto di deformazione di X
3. il punto $Q = (0, 1)$ NON è un retratto di deformazione di X