Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 7 - 19 novembre 2018

Esercizio 1. (Manetti, Esercizio 11.11) Provare che ogni applicazione continua omotopa ad una costante induce l'omomorfismo nullo tra i rispettivi gruppi fondamentali.

Esercizio 2. Sia $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco chiuso di centro l'origine e raggio 1 e sia S^1 il suo bordo. Sia inoltre $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ dotato della topologia discreta. (F_n è un insieme formato da n punti con la topologia discreta). Poniamo, per $n \geq 2$

$$X_n = (D^2 \times F_n)/\sim$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$(x, a) \sim (y, b) \iff x = y \in S^1$$

1. Dimostrare che X_2 è omeomorfo alla sfera S^2 (e quindi X_2 è connesso e semplicemente connesso).
2. Dimostrare (per induzione su n) che X_n è connesso per ogni $n \geq 2$.
3. Dimostrare (per induzione su n) che X_n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 3. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equaizone

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \cdot ((x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

con la topologia di sottospazio.

1. Descrivere lo spazio X.
2. Dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 4. Sia $e : \mathbb{R} \to S^1$ la mappa esponenziale

$$e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

e si consideri il cammino $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ definito da

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{4} + 3t.$$

(a) Si verifichi che $\tilde{\alpha}$ induce un cappio α in S^1 con punto base $p = (0, 1)$.

(b) Si determini il sottogruppo di $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe di α.

Esercizio 5. Sia $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ il suo bordo.

(a) Sia $z \in D^2$. Dimostrare che $D^2 - \{z\}$ è semplicemente connesso se e solo se $z \in S^1$.

(*b*) Utilizzando il punto precedente dimostrare che se $f : D^2 \to D^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$.

Esercizio 6. Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

e

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$$

e poniamo $X = A \cup B \in \mathbb{R}^3$ con la topologia di sottospazio.

Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 7. (a) (2 punti) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *iniettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia iniettivo.

(b) (2 punti) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *suriettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia suriettivo.

(c) (2 punti) Sia ora $f : X \to Y$ continua e *biiettiva.* L'omomorfismo indotto $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è sempre biiettivo? (dimostrare o trovare un controesempio).

Esercizio 8. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 1\right\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B$$

(*a*) Sia $P = (1, 0) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.

(*b*) Dimostrare che A non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 9. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\right\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B$$

(*a*) Sia $P = (0, 1) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.

(*b*) Dimostrare che B non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 10. Consideriamo le funzioni $g, h : S^1 \to S^1$ date da $g(z) = z^n$ e $h(z) = 1/z^n$. Calcolare gli omomorfismi indotti $g_*, h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$.

Suggerimento: ricordare la formula $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.