Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 8 – a.a. 2018-19

Da consegnare: martedì 4 dicembre

Esercizio 1. Sia S la superficie data dalla sequenza di identificazioni $YXZXW$ dove X, Y, Z, W sono sequenze di lati (Y, Z e W possono anche essere vuote). Sia α una lettera che non compare in nessuna sequenza.

1. Dimostrare che S è omeomorfa alla superficie che si ottiene dalla sequenza

   $$Y\,\alpha\,Z\,\alpha\,W$$

   dove sostituiamo alla sequenza di lati X il solo lato α. Interpretare geometricamente questa affermazione.

2. Analogamente, se S è data da

   $$Y\,X\,Z\,X^{-1}\,W$$

   dove X^{-1} significa la sequenza X letta al contrario e con tutti gli esponenti scambiati, dimostrare che S è omeomorfa alla superficie che si ottiene dalla sequenza

   $$Y\,\alpha\,Z\,\alpha^{-1}\,W$$

Attenzione: non è necessario supporre che i vertici siano tutti identificati fra di loro. Per esempio la sequenza $a\,b\,c\,a\,b\,c$ (in cui non tutti i vertici sono identificati fra di loro) può essere scritta come XX, ponendo $X = a\,b\,c$. Allora la superficie data da $a\,b\,c\,a\,b\,c$ è omeomorfa alla superficie data da $\alpha\,\alpha$ ed è quindi un piano proiettivo. Questo tipo di semplificazione si può quindi eseguire prima del Passo 2. Anzi:

Esercizio 2. Dimostrare che se è possibile una semplificazione di questo tipo, i vertici non possono essere tutti equivalenti fra loro.

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti sequenze, determinare il tipo di omeomorfismo della superficie corrispondente. Per la seconda e l'ultima sequenza, applicare esplicitamente l'algoritmo del taglia & incolla per classificare la superficie.

1. $a\,b\,c\,a\,c\,b$
2. $a\,b\,c\,b^{-1}\,d\,e\,c^{-1}\,a\,e\,d$
3. $a\,b\,c\,c^{-1}\,d\,e\,f\,f^{-1}\,e^{-1}\,d^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1}$
4. $a\,e\,d^{-1}\,e^{-1}\,b\,c\,a\,d\,c\,b$
5. $a\,b\,c\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}$
6. $a\,b\,c\,d\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}$

Esercizio 4. Il libro XIII degli *Elementi* di Euclide (l'ultimo libro dell'opera) è dedicato alla costruzione dei 5 solidi platonici: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro e alla dimostrazione del fatto che sono gli unici poliedri *regolari* (cioè tutte le facce sono poligoni regolari uguali fra loro, da ogni vertice parte lo stesso numero di spigoli e gli angoli solidi sono tutti uguali fra loro).

Dimostrare, usando il fatto che un poliedro regolare è una suddivisione della sfera e la caratteristica di Eulero, che queste sono le uniche 5 possibilità.

Notare che questa dimostrazione non dà l'*esistenza.* Costruire il tetraedro, il cubo e l'ottaedro è semplice, ma costruire il dodecaedro e l'icosaedro è meno immediato (ma non è richiesto per quest'esercizio).

Esercizio 5. Per ogni *triangolazione* (cioè tutte le facce sono *triangoli*) di una superficie compatta connessa X con f facce, s spigoli e v vertici, dimostrare che

$$\begin{aligned} 3f &= 2s \\ s &= 3(v - \chi) \\ v &\geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \end{aligned}$$

dove χ è la caratteristica di Eulero di X: $\chi = f - s + v$. Suggerimento per l'ultima diseguaglianza: osservare che il numero s di spigoli è minore o uguale al numero delle coppie di vertici.