Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 10 – a.a. 2018-19

Da consegnare martedì 18 dicembre

Esercizio 1. Consideriamo lo spazio proiettivo n-dimensionale reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e ricordiamo che si può ottenere come il quoziente della sfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali. Sia $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una proiettività. Dimostrare che g è un omeomorfismo (Suggerimento: utilizzare le proprietà della topologia quoziente).

Esercizio 2. Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ e i punti dati, in un sistema di riferimento proiettivo, dalle coordinate omogenee $A = [1 : 0 : 0]$, $B := [1 : 2 : 1]$, $C := [1 : -1 : -1]$ e $D := [1 : 1 : 0]$. Dimostrare che i punti dati sono in posizione generale o spiegare perché non lo sono.

Esercizio 3. *(Es. 5 dallo scritto di settembre 2018.)* Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$, con coordinate omogenee $(x_0 : \cdots : x_3)$, si considerino il sottospazio proiettivo S generato dai punti $(1 : 0 : 3 : 2), (3 : 0 : -1 : 0)$, e il sottospazio proiettivo T di equazioni $x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + ax_1 + 2x_3 = 0$, dove a è un parametro reale.

(1) Determinare, al variare di a, le dimensioni di S, T, $S \cap T$, e $S + T$ (il sottospazio proiettivo generato da $S \cup T$).

(2) Posto $a \neq -4$, determinare delle equazioni per $S + T$.

Esercizio 4. *(Es. 6 dallo scritto di giugno 2017.)* Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia π il piano per $P_1 = [1 : 1 : 0 : 0 : 1]$, $P_2 = [0 : -1 : 0 : 1 : 1]$, $P_3 = [1 : 0 : 1 : 0 : 0]$, e sia r la retta per $Q_1 = [t : 0 : 1 : 1 : 2]$, $Q_2 = [0 : t : -1 : -1 : 0]$, dove t è un parametro reale.

Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.