Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 15 gennaio 2019

Cognome ______________________ Nome ______________________

Numero di matricola ______________________________________

Esercizio 1 *(11 punti)* Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

(1) Verificare che σ è una curva biregolare, e calcolarne curvatura e torsione.

(2) Calcolare la lunghezza di σ tra $t = 0$ e $t = 1$.

(3) Verificare che la curva ha sostegno contenuto nel cono di equazione $x^2+y^2-z^2 = 0$, e che per ogni punto P della curva, l'angolo tra la curva e la retta del cono passante per P è costante.

Esercizio 2 *(11 punti)* Sia $\varphi\colon (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da

$$\varphi(u, v) = ((\sin u + 2) \cos v, (\sin u + 2) \sin v, u)\,.$$

(1) Mostrare che φ è una parametrizzazione globale per una superficie regolare S.

(2) Determinare la natura dei punti di S al variare dei parametri u e v.

(3) Determinare le direzioni asintotiche e le curvature principali nel punto $P = \varphi(\pi/2, \pi)$.

(4) Le curve coordinate date da $u = \pi/2$ e $u = \pi$ sono geodetiche?

Esercizio 3 *(9 punti)* Sia S la superficie regolare ottenuta ruotando attorno all'asse z la parabola $z = x^2$, orientata in modo tale che il versore normale nell'origine sia $(0, 0, 1)$, e sia R la regione regolare

$$R = \{(x, y, z) \in S \,|\, x \le 0, y \ge 0, z \le 1\}.$$

Sia $\omega = 2x^2dy + 3ydz$. Calcolare $\int_R d\omega$.