ESERCIZI DI GEOMETRIA 3 - FORME DIFFERENZIALI (PARTE II)

[1] Data l'applicazione differenziale

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (e^{x_1}, x_1 + x_2, \cos(x_1 x_2))$$

calcolare il pull-back $F^*\omega$ della 2-forma differenziale $\omega = 2xdy \wedge dz + 3yz^2 dx \wedge dz$.

Soluzione. *Si ha*

$$\begin{aligned}
F^*\omega &= 2e^{x_1} d(x_1 + x_2) \wedge d(\cos(x_1 x_2)) + 3(x_1 + x_2)\cos^2(x_1 x_2) d(e^{x_1}) \wedge d(\cos(x_1 x_2)) \\
&= 2e^{x_1}(dx_1 + dx_2) \wedge [-x_2 \sin(x_1 + x_2)dx_1 - x_1 \sin(x_1 x_2)dx_2] \\
&\quad +3(x_1 + x_2)\cos^2(x_1 x_2)e^{x_1} dx_1 \wedge [-x_2 \sin(x_1 + x_2)dx_1 - x_1 \sin(x_1 x_2)dx_2] \\
&= 2e^{x_1} \sin(x_1 x_2)(x_2 - x_1)dx_1 \wedge dx_2 - 3x_1 e^{x_1}(x_1 + x_2)\cos^2(x_1 x_2)\sin(x_1 x_2)dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

[2] Data l'applicazione differenziale

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x^2 e^y, y \sin z)$$

calcolare il pull-back $G^*\eta$ della 1-forma differenziale $\eta = x_1 x_2^2\, dx_1 - 3(x_1 + x_2)dx_2$.

Soluzione. *Si ha*

$$\begin{aligned}
G^*\eta &= x^2 e^y (y \sin z)^2 d(x^2 e^y) - 3(x^2 e^y + y \sin z) d(y \sin z) \\
&= x^2 y^2 e^y \sin^2 z\, (2xe^y dx + x^2 e^y dy) - 3(x^2 e^y + y \sin z)(\sin z dy + y \cos z dz) \\
&= 2x^3 y^2 e^{2y} \sin^2 z dx + (x^4 y^2 e^{2y} \sin^2 z - 3x^2 e^y \sin z - 3y \sin^2 z)dy \\
&\quad -3y(x^2 e^y + y \sin z)\cos z dz.
\end{aligned}$$

[3] Siano (r, θ) coordinate su $\mathbb{R}^2$ e (x, y, z) coordinate su $\mathbb{R}^3$. Data l'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(r, \theta) = (\cos\theta, \sin\theta, r)$. Calcolare il differenziale F_* in termini di queste coordinate ed i pullback $F^*(dx), F^*(dy), F^*(dz)$.

Soluzione. *Il differenziale F_* in ogni punto (r, θ) ha matrice associata*

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
F^*(dx) &= d(x \circ F) = d(\cos\theta) = -\sin\theta d\theta, \\
F^*(dy) &= d(y \circ F) = d(\sin\theta) = \cos\theta d\theta, \\
F^*(dz) &= d(z \circ F) = dr.
\end{aligned}$$

[1] Calcolare il differenziale esterno $d\omega, d\eta, df$ delle seguenti forme differenziali in $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = arctan(y + z)dx + xdy + \log(1 + y^2)dz, \quad \eta = xydx \wedge dy + e^z dy \wedge dz, \quad f(x, y, z) = xyz.$$

Soluzione. *Si ha:*

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(arctan(y + z)) \wedge dx + dx \wedge dy + d(\log(1 + y^2))dz \\
&= \tfrac{1}{1+(y+z)^2}(dy \wedge dx + dz \wedge dx) + dx \wedge dy + \tfrac{2y}{1+y^2} dy \wedge dz \\
&= \left[1 - \tfrac{1}{1+(y+z)^2}\right] dx \wedge dy - \tfrac{1}{1+(y+z)^2} dx \wedge dz + \tfrac{2y}{1+y^2} dy \wedge dz, \\
d\eta &= 0, \\
df &= yzdx + xzdy + xydz.
\end{aligned}$$

[4] Data la forma differenziale

$$\omega = \left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] dx + \frac{x}{x+y} dy.$$

Dire se ω é esatta ed in caso affermativo determinare una primitiva di ω, cioé una funzione f tale che $\omega = df$.

Soluzione. *La forma differenziale definita sull'aperto*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$$

é esatta e $\omega = df$*, con* $f(x,y) = x\,\log(x+y) + c$*,* $c \in \mathbb{R}$.

[5] Provare che le identitá

$$rot(grad(f)) = 0, \quad div(rot(X))$$

con f funzione differenziabile su $\mathbb{R}^3$ e X campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$, seguono dal fatto che $d^2 = 0$.

[6] Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzioni differenziabili su $\mathbb{R}^2$. Provare che

$$df \wedge dg = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} dx \wedge dy.$$

Soluzione. *Si usa che*

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy, \quad dg = g_x\,dx + g_y\,dy.$$

Quindi

$$df \wedge dg = (f_x\,dx + f_y\,dy) \wedge (g_x\,dx + g_y\,dy) = (f_x g_y - f_y g_x) dx \wedge dy.$$