Corso di Laurea in Matematica - Esame di Geometria 3

Prova scritta del 19 febbraio 2019

Cognome ______________________ Nome ______________________

Numero di matricola ______________________________________

Esercizio 1 *(11 punti)* Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma(t) = (2 - \mathrm{Ch}\, t, t+1, 2\mathrm{Sh}\, t).$$

(1) Verificare che σ è una curva biregolare, e calcolarne curvatura e torsione.

(2) Verificare che l'angolo tra σ e l'asse z è costante.

Esercizio 2 *(11 punti)* Consideriamo la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ ottenuta per rotazione attorno all'asse z della circonferenza di equazione $(x-2)^2 + z^2 = 1$ nel piano $y = 0$. Consideriamo le curve in S:

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + z^2 = 1, y = 0\}, \quad C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, z = 1\},$$
$$C_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Una sola delle seguenti affermazioni è corretta; dire quale, giustificando la risposta:
A: C_1 e C_2 sono sostegni di geodetiche di S.
B: C_1 e C_3 sono sostegni di geodetiche di S.
C: C_2 e C_3 sono sostegni di geodetiche di S.

Esercizio 3 *(9 punti)* Sia $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione

$$F(u,v) = (u^2, v^2, uv)\,.$$

1. Si calcoli $F^*\omega$ per
   - $\omega = ydy + zdz$;
   - $\omega = xdy \wedge dz$;
   - $\omega = dx \wedge dy \wedge dz\,.$
2. Delle tre forme differenziali ottenute, determinare quali sono chiuse.