Lunedì 25/02/2019

Cominciamo con la definizione di curva parametrizzata nello spazio

Definizione una curva parametrizzata è una funzione $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dove

- I = intervallo in $\mathbb{R}$ (in generale aperto)
- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, cioè le funzioni $x, y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sono infinitamente differenziabili, cioè hanno derivate di ogni ordine (e quindi hanno tutte le derivate continue).

Osservazione: la definizione dice che una curva parametrizzata è una funzione, quindi non direttamente un oggetto geometrico.

L'immagine $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^3$ è detta la traccia o il sostegno di α

Discuteremo in seguito la differenza fra queste nozioni

Nel seguito ci limiteremo alla teoria delle curve in $\mathbb{R}^3$. Sarà però chiaro che (quasi) tutto si può estendere a curve in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Un caso speciale (che considereremo) è $n = 2$, cioè le curve piane.

Definizione sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata, e sia $t_0 \in I$.
Il vettore

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

viene detto vettore tangente (o vettore velocità) della curva α in t_0.

α si dice regolare in t_0, se

$$\alpha'(t_0) \neq 0$$

cioè se almeno una delle tre derivate è $\neq 0$

α si dice regolare se $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

Esempi

1. Rette

sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto
e $\vec{v} = (l, m, n) \in \mathbb{R}^3$ un vettore

$\alpha(t) = P_0 + t\vec{v} = (x_0 + lt, y_0 + mt, n_0 + nt)$
è la retta passante per P_0 e parallela al vettore $\vec{v}$

osserviamo che $\alpha'(t) = \vec{v}$ $\forall t$, cioè la velocità è costante. L'interpretazione fisica (cinematica) è moto rettilineo uniforme

osserviamo che se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, e $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ allora la curva param.
$\beta(t) = P_0 + t\vec{w}$ è diversa da α, ma il sostegno è lo stesso.

In particolare $\beta'(t) = \vec{w} \neq \vec{v} = \alpha'(t)$

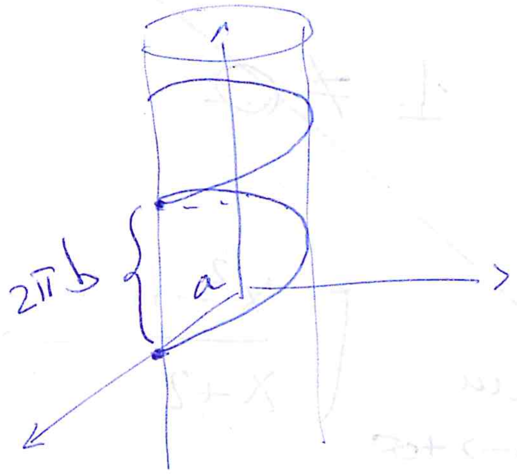
cioè α e β percorrono entrambe la stessa retta, con moto ~~+~~ rettilineo uniforme, ma a velocità diversa.

2. Eliche cilindriche

Sia $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. La curva

$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$

ha come traccia una elica che giace sul cilindro $x^2 + y^2 = a^2$



il raggio è a

il passo è $2\pi b$

nel caso speciale $b = 0$ si ottiene una circonferenza percorsa infinite volte

$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$

quindi la velocità non è costante. Però

$\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 + b^2$ è costante,

cioè la velocità scalare (= modulo del vettore velocità) è costante

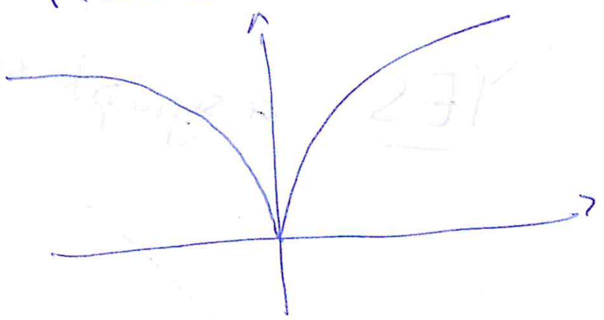
Osserviamo anche che $\alpha'(t) \cdot \vec{k} = b$

cioè $\alpha'(t)$ forma un angolo costante con la retta asse del cilindro.

3. $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t^3; t^2)$ è una curva param. che non è regolare in $t=0$

la traccia è



cioè il grafico della funzione

$\cancel{y = \sqrt{x^3}}$

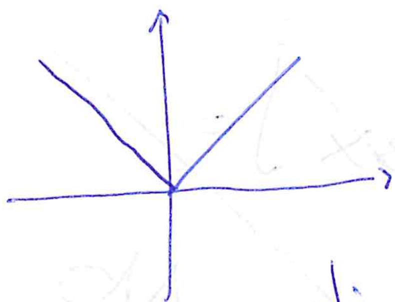
$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}.$$

che è derivabile solo per $x \neq 0$.

Nonostante questo, α è $\mathcal{C}^\infty$ (ma non regolare)

4. $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t, |t|)$ non è una curva param. differenziabile (ovvio). Il sostegno è



Osserviamo però che

$$\beta(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & t \leq 0 \end{cases}$$

ha lo stesso sostegno, ed è di classe $\mathcal{C}^1$, ma non $\mathcal{C}^2$.

Esercizio Spiegare la differenza fra gli esempi 3 e 4, cioè spiegare perché la 4 non ammette parametrizzazioni C^∞ mentre 3 sì.

Esempio 5 Così come le rette, è possibile percorrere la stessa circonferenza a velocità diverse:

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \subseteq \mathbb{R}^2$$

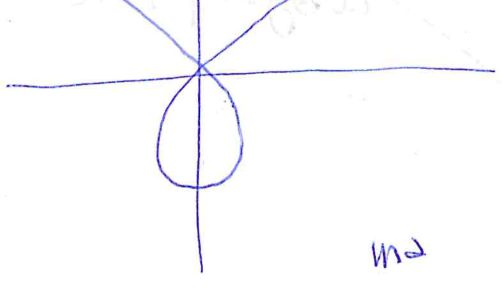
$$\beta(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) \subseteq \mathbb{R}^2$$

si ha, $\forall t$, $\beta'(t) = 2\alpha'(t/2)$

cioè, in punti corrispondenti, la velocità di β è doppia di quella di α.

Esempio 6 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ è una curva parametrizzata regolare



$\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0 \quad \forall t$

ma α non è iniettiva.

Prima di esaminare le differenti possibili parametrizzazioni ~~#~~ che hanno lo stesso sostegno, introduciamo una importante quantità:

sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva param regolare e sia $t_0 \in I$. La funzione:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| \, dt$$

è detta arcolunghezza. Il numero reale $s(t)$ è la ~~lu~~ lunghezza dell'arco di curva fra i punti $P = \alpha(t_0)$ e $Q = \alpha(t)$ (per i dettagli, vedere il corso di Analisi DUE).

osserviamo che $\dfrac{ds}{dt} = |\alpha'(t)| \neq 0 \ \forall t$

quindi la derivata di $s(t)$ è sempre $\neq 0$.

Poiché il dominio è un intervallo (che è connesso) $s'(t)$ mantiene sempre lo stesso segno e quindi $s(t)$ è strettamente crescente (o decrescente). In ogni caso è biunivoca

$$s : I \longrightarrow J = s(I)$$

dove J è ancora un intervallo in $\mathbb{R}$.

poiché $\alpha'(t)$ è di classe C^∞, e sempre diversa da 0, anche $s'(t) = |\alpha'(t)|$ è di classe C^∞. Dunque:

$\boxed{\text{$s$ è invertibile, e la sua inversa è ancora di classe C^∞}}$

se poniamo $t = t(s)$ la funzione inversa, possiamo considerare:

$$\beta(s) = \alpha(t(s))$$

$$\begin{tikzcd}
I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift right, "s(t)"'] & \mathbb{R}^3 \\
J_s \arrow[u, shift right, "t(s)"'] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

e le curve α e β hanno lo stesso sostegno. Però:

$$|\beta'(s)| = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \cdot \left|\frac{dt}{ds}\right| = |\alpha'(t)| \cdot \frac{1}{|\alpha'(t)|} = 1$$

cioè la velocità scalare di $\beta(s)$ è costantemente 1.

Il diagramma precedente potrebbe essere considerato per ~~una~~ una qualunque funzione $\varphi: I \longrightarrow J$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ con inversa $\psi: J \longrightarrow I$ di classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{tikzcd}
I_t \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, bend right, "\varphi"'] & \mathbb{R}^3 \\
J_s \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[u, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}
\qquad \beta(s) = \alpha(\psi(s))$$

α e β si dicono ottenute mediante un <u>cambio di parametrizzazione</u>. È chiaro che α e β hanno lo stesso sostegno (sono percorse con "leggi del moto" diverse) e quindi le proprietà <u>geometriche</u> di una curva dovrebbero essere indipendenti dalla parametrizzazione.

Possiamo riassumere questi discorsi con una definizione:

<u>Definizione</u> Una <u>curva</u> è una classe di equivalenza di curve param., dove $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sono equivalenti se esiste $\varphi : I \longrightarrow J$ <u>diffeomorfismo</u> (cioè φ biunivoca, di classe C^∞ con inversa di classe C^∞) tale che $\alpha = \beta \circ \varphi$.

<u>Esercizio</u> dimostrare che è una rel. di equiv.

<u>Esempio</u> se α e β sono equivalenti, sia $t_0 \in I$, $u_0 = \varphi(t_0) \in J$.
Allora, $\forall t \in I$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt = \int_{u_0}^{u=\varphi(t)} |\beta'(u)| du$$

$$= s(u) = s(\varphi(t))$$

cioè l'arcolunghezza è una propr. geometrica (dim: ANALISI DUE)

Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una ~~cur~~ curva regolare. Allora $s : I \longrightarrow J$ è un cambio di parametrizzazione, la nuova ~~param~~ parametrizzazione $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è detta parametrizzazione per arcolunghezza e la sua proprietà caratteristica è che:

$$|\beta'(s)| \equiv 1 \quad \forall s \in J$$

Studieremo perciò le curve con questa ipotesi addizionale. Vedremo poi come trattare il caso generale.

— o —

Sia ~~dunque~~ dunque $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ param per arcolunghezza. Useremo per chiarezza sempre s come nome del parametro.

Si ha $\alpha'(s)$ = vettore tangente $\neq 0$ e quindi per $P_0 = \alpha(s_0)$ c'è la retta tangente:

$$P_0 + t \cdot \alpha'(s_0)$$

(che non dipende dalla parametrizzazione)

$\alpha'(s)$ ha lunghezza costante, quindi la sua derivata misura il cambiamento di direzione della retta tangente

Definizione

$$|\alpha''(s)| = k(s) = \text{curvatura di } \alpha \text{ in } s$$

Esempio:

1. retta $\Longleftrightarrow$ $k(s) \equiv 0$

$\Rightarrow$ basta derivare

$\Leftarrow$ $\alpha''(s) \equiv 0 \Rightarrow \alpha'(s) = \vec{v}$ (costante)

$\Rightarrow \alpha(s) = P_0 + t v$ = retta

2. circonf.

$\alpha(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t)$

~~$\alpha'(t) = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t)$~~

~~$\alpha''(t) =$~~

$\alpha'(t) = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t) \longrightarrow |\alpha'(t)| = r$

allora $s(t) = rt \Rightarrow t(s) = \frac{s}{r}$

dunque $\beta(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r \operatorname{sen}\frac{s}{r}\right)$

derivando:

$$\beta'(s) = \left(-\operatorname{sen}\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right) \qquad (|\beta'(s)| = 1)$$

$$\beta''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\operatorname{sen}\frac{s}{R}\right)$$

e dunque $\qquad k(s) = \frac{1}{R}$

la circonferenza ha <u>curvatura costante</u>
(pari all'inverso del raggio)