Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven.

Von

Werner Fenchel in Göttingen.

Wir betrachten zweimal stetig differenzierbare geschlossene Raumkurven. Wird die Bogenlänge s als Parameter gewählt, so läßt sich eine solche Kurve durch den Ortsvektor $\mathfrak{x}(s)$ mit $|\mathfrak{x}_s| = 1$ [1]) darstellen. $\mathfrak{x}(s)$ ist periodisch mit der Periode l, wenn l die Gesamtlänge der Kurve bezeichnet. Das Tangentenbild $\mathfrak{x}_s(s)$ ist unter diesen Annahmen eine rektifizierbare geschlossene Kurve auf der Einheitskugel. Die Länge des Tangentenbildes ist $\int\limits_0^l \varkappa(s)\,ds$, wobei $\varkappa = |\mathfrak{x}_{ss}|$ die Krümmung der Raumkurve ist. Für derartige Kurven gilt der folgende

Satz I. *Die Gesamtkrümmung* $\int\limits_0^l \varkappa\,ds$ *einer geschlossenen Raumkurve ist* $\geqq 2\pi$. *Das Gleichheitszeichen steht nur für ebene konvexe Kurven.*[2])

Setzen wir weiter voraus, daß $\mathfrak{x}(s)$ dreimal stetig differenzierbar und überdies $\mathfrak{x}_{ss} \neq 0$ ist, so besitzt die Kurve eine positive stetige Krümmung und eine stetige Windung $\omega(s)$.

Für solche Kurven gilt der

Satz II. *Besitzt das Tangentenbild einer geschlossenen Raumkurve*

---

[1]) Der Index s bedeutet wie üblich Differentiation nach s.

[2]) Man kann die gemachten Voraussetzungen ohne Änderung des Beweises wesentlich einschränken. Es genügt anzunehmen, daß $\int\limits_0^l \varkappa(s)\,ds$ im Sinne von Lebesgue existiert; auch dann stellt $\int\limits_0^l \varkappa(s)\,ds$ die Bogenlänge des Tangentenbildes dar. Vgl. Lebesgue, Intégrale, Longueur, Aire, Annali di Matematica (3) 7 (1902), Chap. III, S. 291 ff.

Daß nur für *konvexe* ebene Kurven das Gleichheitszeichen stehen kann, beruht natürlich darauf, daß nach der obigen Definition die Krümmung auch für ebene Kurven stets nicht negativ ist.

höchstens einen Doppelpunkt, so muß die Windung das Vorzeichen ändern, falls sie nicht identisch verschwindet.

Im § 1 wird mit Hilfe zweier einfacher Bemerkungen über das Tangentenbild geschlossener Raumkurven gezeigt, daß die Sätze I und II aus zwei Sätzen I′ und II′ über Kurven auf der Kugel folgen, und zwar über Kurven, deren kleinste konvexe Hülle den Mittelpunkt der Kugel enthält. § 2 enthält den Hauptthilfssatz über die kleinste konvexe Hülle zusammenhängender Punktmengen. Im § 3 wird hieraus der Satz I′ gefolgert. § 4 enthält Hilfssätze über sphärische Kurven positiver geodätischer Krümmung. Im § 5 wird der Beweis des Satzes II′ zu Ende geführt, und schließlich enthält § 6 ein Beispiel einer Kurve mit nicht negativer Windung, deren Tangentenbild genau zwei Doppelpunkte besitzt, so daß also der Satz II nicht verschärft werden kann.

§ 1.

Das Tangentenbild geschlossener Raumkurven.

Die Tangentenbilder geschlossener Raumkurven sind unter den geschlossenen sphärischen Kurven, wie Herr Löwner[3]) bemerkt hat, dadurch ausgezeichnet, daß sie von jedem Großkreis geschnitten werden. Man erkennt das so: Für eine geschlossene Raumkurve ist $\int_0^l \mathfrak{x}_s(s)\,ds = 0$, also auch $\int_0^l \mathfrak{a}\mathfrak{x}_s(s)\,ds = 0$, wenn $\mathfrak{a}$ ein beliebiger fester Vektor ist. Daher ist entweder $\mathfrak{a}\mathfrak{x}_s \equiv 0$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{x}_s$ nimmt positive und negative Werte an, d. h. es liegen auf beiden Seiten der durch den Nullpunkt gehenden auf $\mathfrak{a}$ senkrechten Ebene Punkte des Tangentenbildes. Der erste Fall kann nur eintreten, wenn die Kurve eben ist. Andernfalls müssen also die Punkte des Tangentenbildes von einem beliebigen Großkreis getrennt werden. Dieser Sachverhalt läßt sich auch so ausdrücken: Der Mittelpunkt der Kugel gehört jedenfalls der kleinsten konvexen Hülle des Tangentenbildes an; denn angenommen, er läge außerhalb derselben, so ließe sich durch ihn eine Ebene legen, die keinen Punkt mit dem Tangentenbild gemein hätte[4]), was

---

[3]) In Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze 2, Berlin: Julius Springer, 1925, S. 165 und 391, Aufgabe 13.

[4]) Beweise hierfür findet man in den folgenden Abhandlungen: E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. f. reine u. angew. Math. **143**, S. 128 ff.; E. Schmidt, Zum Hilbertschen Beweise des Waringschen Theorems, Math. Annalen **74**, S. 271; C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. del Circ. matem. di Palermo **32**, S. 193 ff.

dem obigen widerspricht. Wir können sogar behaupten, daß der Mittelpunkt der Kugel dem Innern der kleinsten konvexen Hülle angehört, falls nicht $\mathfrak{a}\mathfrak{x}_s(s) \equiv 0$ ist, denn läge er auf dem Rande, so könnte man durch ihn eine Stützebene legen, eine Ebene also, die die Punkte des Tangentenbildes nicht trennt. Eine solche Ebene ist aber nach dem obigen nur bei $\mathfrak{a}\mathfrak{x}_s \equiv 0$, also bei ebenen Kurven möglich. Satz I wird also im wesentlichen folgen aus

Satz I′. *Eine geschlossene, rektifizierbare, nicht ebene Kurve auf der Einheitskugel, deren kleinste konvexe Hülle den Mittelpunkt der Kugel im Innern enthält, hat eine Länge* $> 2\pi$.

Um nun auch den Satz II auf einen Satz über das Tangentenbild zurückzuführen, haben wir festzustellen, welche Bedeutung das Vorzeichen der Windung für das Tangentenbild besitzt. Es zeigt sich, daß die Windung nur um einen positiven Faktor von der geodätischen Krümmung $\varkappa_g$ des Tangentenbildes verschieden ist. Es ist genauer $\omega = \varkappa \cdot \varkappa_g$. Bezeichnen wir die Bogenlänge des Tangentenbildes $\int_0^s \varkappa(s)\,ds$ mit σ, so ist $|\mathfrak{x}_\sigma|$[5]$) = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\varkappa} > 0$. (Es ist $\varkappa > 0$, da wir hier die vor der Formulierung von Satz II gemachten Voraussetzungen zu berücksichtigen haben.) Das Tangentenbild wird beschrieben durch den Vektor $\frac{\mathfrak{x}_\sigma}{|\mathfrak{x}_\sigma|}$, der zugleich Einheitsvektor der Kugelnormalen ist. Die geodätische Krümmung wird dann

$$\varkappa_g = \left(\frac{\mathfrak{x}_\sigma}{|\mathfrak{x}_\sigma|}, \left(\frac{\mathfrak{x}_\sigma}{|\mathfrak{x}_\sigma|}\right)_\sigma, \left(\frac{\mathfrak{x}_\sigma}{|\mathfrak{x}_\sigma|}\right)_{\sigma\sigma}\right).^{6)}$$

Die Ausführung der Differentiationen ergibt:

$$\varkappa_g = |\mathfrak{x}_\sigma|^{-3}(\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_{\sigma\sigma}, \mathfrak{x}_{\sigma\sigma\sigma}) = \varkappa^3(\mathfrak{x}_\sigma, \mathfrak{x}_{\sigma\sigma}, \mathfrak{x}_{\sigma\sigma\sigma}).$$

Führt man hier den Parameter s ein, so erhält man:

$$\varkappa_g = \varkappa^3\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^6(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{x}_{ss}, \mathfrak{x}_{sss}) = \frac{(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{x}_{ss}, \mathfrak{x}_{sss})}{\varkappa^3} = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{(\mathfrak{x}_s, \mathfrak{x}_{ss}, \mathfrak{x}_{sss})}{\mathfrak{x}_{ss}^2} = \frac{\omega}{\varkappa}.^{7)}$$

Beachtet man nun außerdem die Bemerkung von Löwner, so erkennt man, daß II folgt aus

Satz II′. *Längs einer geschlossenen sphärischen Kurve mit höchstens einem Doppelpunkt und stetiger geodätischer Krümmung, die von jedem*

[5]) Der Index σ bedeutet Differentiation nach σ.

[6]) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1, Berlin: Julius Springer, 2. Aufl. 1924, S. 91. $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bedeutet die in üblicher Weise aus den Koordinaten der drei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gebildete Determinante.

[7]) W. Blaschke, a. a. O., S. 13.

Großkreis durchsetzt wird, kann das Vorzeichen der geodätischen Krümmung nicht überall dasselbe sein.

Oder auch aus

Satz II″. *Eine geschlossene sphärische Kurve mit höchstens einem Doppelpunkt und nicht negativer stetiger geodätischer Krümmung ist in einer abgeschlossenen Halbkugel enthalten.*

§ 2.

Über die kleinste konvexe Hülle zusammenhängender Punktmengen.

Satz A. $\mathfrak{M}$ *sei eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge des dreidimensionalen Raumes und P ein Punkt, der ihrer kleinsten konvexen Hülle angehört. Dann gibt es mindestens einen ebenen Schnitt von $\mathfrak{M}$, dessen kleinster konvexer Hülle P angehört.*

Indirekt ausgedrückt: Wenn P außerhalb der kleinsten konvexen Hülle eines jeden ebenen Schnittes von $\mathfrak{M}$ liegt, so liegt P auch außerhalb der kleinsten konvexen Hülle von $\mathfrak{M}$. Ein Punkt liegt dann und nur dann außerhalb der kleinsten konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn sich durch ihn eine Ebene (bzw. Gerade, wenn es sich um eine ebene Punktmenge handelt) legen läßt, die keinen Punkt der Menge enthält und die die Punkte der Menge nicht trennt[8]). Nennen wir nun (nach Carathéodory) eine $n-1$-dimensionale Ebene eine *Schranke* einer Punktmenge $\mathfrak{N}$ des n-dimensionalen Raumes, wenn sie selbst und der eine durch sie bestimmte Halbraum keine Punkte von $\mathfrak{N}$ enthält, so läßt sich Satz A auch folgendermaßen formulieren:

Satz A′. $\mathfrak{M}$ *sei eine beschränkte, abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge des dreidimensionalen Raumes. P sei ein Punkt mit folgender Eigenschaft: In jeder durch P gehenden Ebene ε läßt sich durch P eine Gerade legen, die eine Schranke des Durchschnitts von ε und $\mathfrak{M}$ ist. Dann läßt sich durch P eine Schranke von $\mathfrak{M}$ legen.*

In dieser Form soll der Satz bewiesen werden. Wir überzeugen uns zunächst, daß es genügt, ihn für die Vereinigungsmengen von endlich vielen Kugeln zu beweisen. Ist die Behauptung für eine die Menge $\mathfrak{M}$ überdeckende Menge $\mathfrak{K}$ von endlich vielen Kugeln richtig, so ist sie für $\mathfrak{M}$ selbst gewiß richtig. Wir haben nur zu zeigen, daß sich $\mathfrak{M}$ so mit endlich vielen Kugeln überdecken läßt, daß P in bezug auf die Kugelmenge $\mathfrak{K}$ noch die vorausgesetzte Eigenschaft besitzt, d. h. daß sich in jeder P enthaltenden Ebene ε durch P eine Schranke des Durchschnitts von $\mathfrak{K}$ und ε legen läßt.

---

[8]) Sämtliche in diesem Paragraphen benutzten Eigenschaften konvexer Punktmengen sind hergeleitet bei Steinitz a. a. O., E. Schmidt a. a. O., Carathéodory a. a. O.

Wir betrachten eine beliebige für den Augenblick feste Ebene ε durch P und eine variable, abgeschlossene Halbebene η in ε, deren Begrenzung P enthält. Diese Halbebene hat von $\mathfrak{M}$ eine Minimalentfernung $\geqq 0$.[9]) Diese Entfernung als Funktion der variablen Halbebene η ist stetig und besitzt, da sie in einer kompakten abgeschlossenen Menge[10]) definiert ist, ein Maximum. Dieses muß positiv sein, da es nach Voraussetzung in ε eine zu $\mathfrak{K}$ punktfremde Halbebene mit P auf dem Rande gibt. Auf diese Weise ist jeder durch P gehenden Ebene eine positive Zahl, nämlich dieses Maximum, zugeordnet. Diese Funktion ist wieder stetig und in einer kompakten abgeschlossenen Menge definiert[10]). Sie besitzt also ein positives Minimum δ. In jeder durch P gehenden Ebene ε gibt es daher eine Halbebene η_ε mit P auf dem Rande, deren Minimalentfernung von $\mathfrak{M}$ größer oder gleich δ ist. Überdecken wir nun $\mathfrak{M}$ mit Kugeln eines Radius $\varrho < \frac{\delta}{2}$, so daß in jeder Kugel mindestens ein Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so können die Halbebenen η_ε keinen Punkt mit der Kugelmenge gemein haben. Da $\mathfrak{M}$ mit endlich vielen derartigen Kugeln überdeckt werden kann, genügt es, A′ für die Vereinigungsmengen endlich vieler Kugeln zu beweisen.

Wir betrachten einen variablen abgeschlossenen Halbraum $\mathfrak{H}$, dessen begrenzende Ebene ε den Punkt P enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{K}$ habe den Inhalt $f(\mathfrak{H})$. $f(\mathfrak{H})$ ist offenbar eine stetige Funktion des Halbraumes $\mathfrak{H}$. Sie ist in einer kompakten abgeschlossenen Menge definiert, besitzt daher ein Maximum. Dieses werde für den Halbraum $\mathfrak{H}_0$ mit der Begrenzungsebene ε_0 angenommen.

Wir wollen beweisen, daß entweder ε_0 oder eine ein wenig gedrehte Ebene Schranke von $\mathfrak{K}$ ist. Angenommen, der zu $\mathfrak{H}_0$ komplementäre Halbraum $\bar{\mathfrak{H}}_0$ enthielte Punkte von $\mathfrak{K}$, dann — wollen wir zeigen — ließe sich ein anderer Halbraum $\mathfrak{H}_1$ angeben, so daß $f(\mathfrak{H}_1) > f(\mathfrak{H}_0)$ würde. Nach dem früheren gibt es in ε_0 eine Halbebene η_{ε_0}, die einschließlich ihrer

---

[9]) Zwei abgeschlossene Punktmengen, von denen die eine beschränkt ist, haben eine positive Minimalentfernung, falls sie punktfremd sind. Haben sie Punkte gemeinsam, so soll die Entfernung Null gesetzt werden.

[10]) Eine Menge heißt kompakt, wenn jede unendliche Teilmenge ein Häufungselement besitzt. Dieser Begriff wie auch der der Stetigkeit erfordert die Definition des Häufungselementes. Es ist hier naturgemäß die folgende zu verwenden: Die im Text betrachteten Halbebenen sind festgelegt durch ihre orientierten Begrenzungsgeraden. Die orientierten Geraden durch einen Punkt in einer Ebene lassen sich festlegen durch die Punkte des Einheitskreises in dieser Ebene. Man hat die Definition des Häufungspunktes auf die Halbebenen zurück zu übertragen. Später werden noch Funktionen der Ebenen durch einen Punkt und der Halbräume, deren Begrenzungsebenen einen festen Punkt enthalten, betrachtet. Hier verfährt man analog. Die Ebenen entsprechen den Paaren diametraler Punkte auf der Einheitskugel, die Halbräume den orientierten Ebenen, also den Punkten auf der Einheitskugel.

Begrenzungsgeraden g_{ε_0} (P auf g_{ε_0}) keinen Punkt von $\mathfrak{K}$ enthält. (Fig. 1 stellt einen zu g_{ε_0} senkrechten Schnitt dar.) Um g_{ε_0} drehen wir den Halbraum $\mathfrak{H}_0$, und zwar in dem Sinne, daß sich η_{ε_0} in den alten Halbraum $\mathfrak{H}_0$ hineinbewegt. Die Drehung sei so klein, daß η_{ε_0} während der Drehung und in der Endlage keinen Punkt von $\mathfrak{K}$ trifft. Dies ist möglich, da η_ε von $\mathfrak{K}$ eine positive Entfernung hat. Der gedrehte Halbraum sei $\mathfrak{H}_1$, seine Begrenzungsebene ε_1. Es ist jedenfalls $f(\mathfrak{H}_1) \geqq f(\mathfrak{H}_0)$, denn der zu $\mathfrak{H}_0$, aber nicht zu $\mathfrak{H}_1$ gehörige Raumteil $\mathfrak{A}$ enthält keinen Punkt von $\mathfrak{K}$. Wohl aber muß der zu $\mathfrak{H}_1$, aber nicht zu $\mathfrak{H}_0$ gehörige Teil des Raumes $\mathfrak{B}$ Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten, falls — wie wir angenommen haben — $\bar{\mathfrak{H}}_0$ Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält. Da nämlich mit $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{K}$ zusammenhängend ist, gibt es eine Kette von Kugeln von $\mathfrak{K}$, von denen jede mit der folgenden Punkte gemein hat, die einen Punkt von $\bar{\mathfrak{H}}_0$, der zu $\mathfrak{K}$ gehört, mit einem zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Punkt von $\mathfrak{H}_0$ verbindet. Wir betrachten die letzte Kugel dieser Kette, die noch innere Punkte mit $\bar{\mathfrak{H}}_0$ gemein hat. Sie enthält jedenfalls auch Punkte von ε_0. Da aber η_{ε_0} zu $\mathfrak{K}$ punktfremd ist, muß diese Kugel von der zu η_{ε_0} komplementären Halbebene geschnitten werden. Folglich muß sie innere Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemein haben, d. h. aber, daß beim Übergang von $\mathfrak{H}_0$ zu $\mathfrak{H}_1$ $f(\mathfrak{H})$ wirklich zunehmen muß, was der Definition von $\mathfrak{H}_0$ widerspricht. $\bar{\mathfrak{H}}_0$ kann demnach keine Punkte von $\mathfrak{K}$ enthalten. Falls ε_0 selbst noch Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält, ist eine ein wenig im selben Sinne wie vorhin gedrehte Ebene Schranke von $\mathfrak{K}$. Das ist unsere Behauptung.

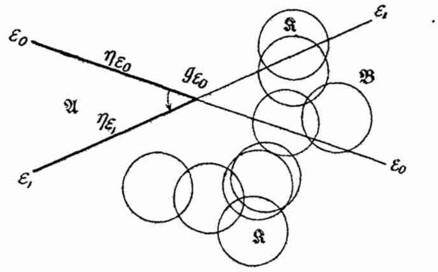

Fig. 1.

Aus dem Satz A wollen wir noch eine Folgerung ziehen, und zwar mit Hilfe von

Satz B. *$\mathfrak{N}$ sei eine Punktmenge des n-dimensionalen Raumes, P ein Punkt der kleinsten konvexen Hülle von $\mathfrak{N}$. Dann gibt es, falls P nicht selbst in $\mathfrak{N}$ enthalten ist, ein Simplex mit höchstens $n+1$ Ecken, die alle auf $\mathfrak{N}$ liegen, derart, daß P seinem Innern angehört.*[11])

Sei jetzt $\mathfrak{M}$ wieder eine beschränkte abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge des dreidimensionalen Raumes und P ein Punkt ihrer kleinsten konvexen Hülle. Dann gibt es nach A einen ebenen Schnitt von $\mathfrak{M}$, dessen kleinster konvexer Hülle P angehört. Auf diesen ebenen

[11]) Beweise für diesen Satz finden sich in den genannten Abhandlungen von Steinitz, E. Schmidt und Carathéodory.

Schnitt wenden wir B an. Es ist hier $n = 2$, also gibt es zwei oder drei Punkte von $\mathfrak{M}$, so daß P der durch die zwei Punkte bestimmten Strecke oder dem durch die drei Punkte bestimmten Dreieck angehört.

§ 3.

Die Länge des Tangentenbildes.

Aus der am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Folgerung läßt sich nun leicht der Satz I′ erschließen.

$\mathfrak{M}$ sei jetzt eine geschlossene rektifizierbare Kurve auf der Einheitskugel. Der Kugelmittelpunkt gehöre ihrer kleinsten konvexen Hülle an. Ihn wählen wir als den Punkt P des vorigen Paragraphen. Dann gibt es also entweder zwei Punkte der Kurve, deren Verbindungslinie den Mittelpunkt enthält, d. h. zwei diametrale Punkte, oder aber es gibt drei Punkte von der Art, daß das von ihnen gebildete Dreieck den Kugelmittelpunkt enthält, drei Punkte also, von denen nicht zwei diametral sind, und die so auf einem Großkreis liegen, daß kein Halbkreis frei bleibt. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Wegen der Geschlossenheit der Kurve sind die beiden diametralen Punkte durch zwei Kurvenbögen verbunden, von denen jeder wegen der Extremaleigenschaft der Großkreise eine Länge $\geqq \pi$ besitzt. Das Gleichheitszeichen steht nur, falls der Kurvenbogen ein halber Großkreis ist. Die ganze Kurve hat also eine Länge $> 2\pi$, falls sie nicht aus zwei halben Großkreisen besteht. In diesem Ausnahmefall liegt aber offenbar der Kugelmittelpunkt auf dem Rande der konvexen Hülle. Besitzt also die Kurve ein Paar diametraler Punkte, so ist Satz I′ bewiesen. Im zweiten Fall, wenn es drei Kurvenpunkte von der angegebenen Eigenschaft gibt, schließen wir so: je zwei Punkte müssen wegen der Geschlossenheit der Kurve durch einen Kurvenbogen verbunden sein, der länger oder mindestens ebenso lang ist wie der zwischen den beiden Punkten verlaufende kürzere Großkreisbogen. Diese drei Großkreisbögen haben zusammen die Länge 2π. Das Gleichheitszeichen kann hier nur stehen, wenn alle drei Kurvenbögen mit den entsprechenden Großkreisbögen identisch sind, wenn also die Kurve ein Großkreis ist. Dann liegt aber der Mittelpunkt wieder auf dem Rande der konvexen Hülle. Satz I′ ist also vollständig bewiesen.

Zum Beweis des Satzes I haben wir nur noch den Fall der ebenen Kurven zu diskutieren, denn im § 1 ist gezeigt worden, daß das Tangentenbild von nicht ebenen Kurven die Voraussetzung von Satz I′ erfüllt. Ist die Kurve eben, so muß das Tangentenbild ein Großkreis oder ein Teil davon sein. Ist es ein ganzer Großkreis, so ist seine Länge $= 2\pi$, wenn er immer im gleichen Sinne durchlaufen wird, sonst ist sie größer. Ist das

Tangentenbild nur ein Teil eines Großkreises, so muß dieser Teil mehr als einen Halbkreis enthalten, da nach § 1 jeder andere Großkreis seine Punkte trennen muß. Außerdem muß er wegen der Geschlossenheit des Tangentenbildes mindestens doppelt durchlaufen werden. Die Gesamtlänge des Tangentenbildes ist also in diesem Falle stets $> 2\pi$. Die Länge des Tangentenbildes ist also nur für ebene konvexe Kurven $= 2\pi$, denn nur für solche ist das Tangentenbild ein stets im gleichen Sinne durchlaufener Großkreis.[12])

§ 4.

Über sphärische Kurvenbögen positiver geodätischer Krümmung.

Wir betrachten in diesem Paragraphen Kurvenbögen auf der Kugel mit bis in die Endpunkte stetiger geodätischer Krümmung. Die Kugel sei orientiert, z. B. so, daß der positive Umlauf beim Sehen auf die Kugel entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn erscheint. Wechselt ein Kurvenbogen

---

[12]) Herrn Prof. E. Schmidt verdanke ich den folgenden Beweis der Sätze I und I′, der ausschließlich den Satz B (§ 2) und nicht den Satz A verwendet.

Wenn wir den Satz B auf die sphärische Kurve und den Kugelmittelpunkt als Punkt P anwenden, besagt er, daß es ein Punktepaar oder ein Punktetripel von den im Text angegebenen Eigenschaften oder schließlich vier Punkte von der Art gibt, daß der Mittelpunkt dem von ihnen gebildeten Tetraeder angehört. In den beiden ersten Fällen schließen wir wie im Text. Im letzten Fall können wir jedenfalls annehmen, daß der Kugelmittelpunkt dem Innern des Tetraeders angehört, d. h. daß unter den vier Punkten weder zwei diametrale noch drei auf einem Großkreis liegende vorkommen, denn sonst läge einer der ersten beiden Fälle vor. Die Kurve ist jedenfalls länger oder mindestens ebenso lang wie das kürzeste Großkreisviereck, das die vier Punkte zu Ecken hat. Wir haben uns davon zu überzeugen, daß dieses Viereck eine Länge $> 2\pi$ besitzt. Die vier Punkte müssen so liegen, daß zwei von ihnen durch den Großkreis, der die beiden andern verbindet, getrennt werden, denn andernfalls würden die vier Punkte auf einer Halbkugel liegen, was unmöglich ist, da der Kugelmittelpunkt dem Innern des Tetraeders angehören soll. Die vier Punkte A, B, C, D seien in dieser Reihenfolge durch Vierecksseiten verbunden, und zwar durch die kürzeren Großkreisbögen AB, BC, CD, DA, da wir das kürzeste Viereck zu betrachten haben. Der Großkreis AB trennt die Punkte C und D. Die Seite CD wird also von ihm geschnitten. Der Schnittpunkt sei E. Er kann nicht auf der Seite AB liegen, denn sonst würde die eine von dem Großkreis AC begrenzte Halbkugel alle vier Punkte enthalten. A, B und E liegen so, daß kein Halbkreis des Großkreises AB freibleibt, denn wäre dies der Fall, so würden weder E noch sein diametraler Punkt auf der Seite AB liegen. Diese könnte also im Widerspruch mit dem obigen auch den durch E gehenden Großkreis CD nicht schneiden. Es ist also die Summe der Längen der kürzesten Großkreisbögen AB, BE, EA gleich 2π. Die Länge des Vierecks ist $AB+BC+CE+ED+DA$. Nun ist aber wegen der Extremaleigenschaft der Großkreisbögen $BC+CE > BE$ und $ED+DA > EA$. Also ist die Länge des Vierecks $> 2\pi$, was zu beweisen war.

nirgends das Vorzeichen der geodätischen Krümmung, und wird er so durchlaufen, daß die Krümmung $\geqq 0$ wird, so liegt er in genügender Nähe des Berührungspunktes im berührenden Großkreis oder links von ihm, und umgekehrt, wenn die Kurve in der Nähe eines ihrer Punkte im oder links vom berührenden Großkreis liegt, so ist im Berührungspunkt die Krümmung $\geqq 0$.[13]) Das ist auch dann richtig, wenn der Berührungspunkt ein Endpunkt der Kurve ist. Wir stellen einige einfache Eigenschaften sphärischer Kurvenbögen zusammen.

1. Ein doppelpunktfreier Kurvenbogen verbinde zwei diametrale Punkte A und B, ohne einen festen durch A und B gehenden Großkreis sonst zu treffen. Dann hat die geodätische Krümmung mindestens eine Nullstelle.

Wir verbinden A mit einem variablen Punkt P der Kurve durch einen Großkreis. Wir ordnen dem Punkt P den Winkel zwischen dem Großkreis AP und dem einen von A nach B führenden Halbkreis des festen Großkreises zu. Den Punkten A und B selbst wird der Winkel zwischen den in ihnen berührenden Großkreisen und demselben Halbkreis zugeordnet. Auf diese Weise ist auf dem abgeschlossenen Kurvenbogen eine stetige Funktion definiert. Sie nehme ihr Maximum bzw. ihr Minimum in den Punkten M bzw. m an. Die Großkreise AM und Am berühren offenbar die Kurve und durchsetzen sie nirgends. Der Durchlaufungssinn der Kurve führe von A nach B. Die berührenden Großkreise erhalten dadurch ebenfalls eine Orientierung, die wir zu bestimmen haben (Fig. 2).

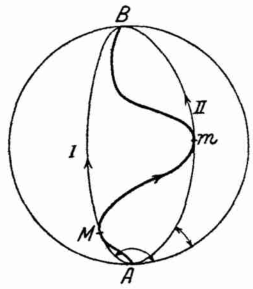

Fig. 2.

Die eine von dem festen Großkreis begrenzte Halbkugel wird durch den Kurvenbogen in zwei Teile I und II zerlegt. I sei etwa der linke. Der Halbkreis AMB verlaufe in I oder auf seinem Rande. Das Gebiet II liegt rechts von der Kurve. Da es aber ganz auf einer Seite des berührenden Großkreises AMB liegt, muß es auch rechts von ihm liegen. Die induzierte Orientierung von AMB muß also von A nach B laufen. Entsprechend sieht man, daß AmB ebenfalls von A nach B orientiert ist. Das heißt aber, daß die Kurve rechts von AMB und links von AmB verläuft. Nach der eingangs gemachten Bemerkung muß also die geodätische Krümmung $\leqq 0$ in M und $\geqq 0$ in m sein. Das enthält unsere Behauptung.

[13]) Bieberbach, Tchebychefsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, Sitzungsber. d. Preuß. Akademie d. Wiss. 1926, S. 300. Die dort benutzte Schlußweise läßt sich ohne Schwierigkeit umkehren.

2. Ein doppelpunktfreier Kurvenbogen mit nirgends verschwindender Krümmung verbinde zwei Punkte A und B eines Großkreises, ohne ihn sonst zu treffen. (A und B können nach 1. nicht diametral sein.) Orientiert man nun die Kurve so, daß die Krümmung positiv wird, so liegt das von der Kurve und dem kleineren Großkreisbogen AB begrenzte, in einer Halbkugel liegende Gebiet zu ihrer Linken.

Zum Beweise wählen wir zwei diametrale Punkte C und D, die beide dem größeren Bogen AB angehören. Wir verbinden C mit einem variablen Punkt P des Kurvenbogens. Der Winkel ACP wird für einen gewissen Punkt M der Kurve sein Maximum annehmen. Der Großkreis CM berührt offenbar die Kurve in M. Die Kurve und das fragliche Gebiet liegen auf derselben Seite des Großkreises CM. Orientiert man nun die Kurve so, daß sie zur Linken des berührenden Großkreises liegt, so liegt also auch das fragliche Gebiet zu seiner Linken, also auch links von der Kurve, was zu beweisen war (Fig. 3).

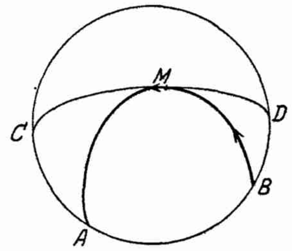

Fig. 3.

P und Q seien nicht diametral. Wir sagen von einem Punkt R, er liege zwischen P und Q, wenn er dem kleineren Großkreisbogen PQ angehört.

3. A, B, C seien drei aufeinander folgende Schnittpunkte einer positiv gekrümmten doppelpunktfreien Kurve mit einem Großkreis. Dann liegt entweder A zwischen B und C oder C zwischen A und B.

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß B kein Berührungspunkt sein kann. Angenommen, es wäre dies der Fall, dann würde der Bogen AB jedenfalls in der Richtung von B nach A berühren müssen, denn das von der Kurve und dem kürzeren Bogen AB begrenzte Gebiet muß nach 2. links von der Kurve, also auch links von dem berührenden Großkreis liegen.

Fig. 4.

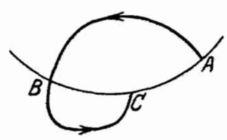

Fig. 5.

Der Schnittpunkt C müßte dann aber zwischen A und B liegen, denn die Kurve tritt hinter B in das eben erwähnte Gebiet ein. Das von dem Kurvenbogen BC und der kürzesten Verbindung BC begrenzte Gebiet würde dann aber rechts von der Kurve liegen, was nach 2. unmöglich ist. Hat die Kurve also drei Punkte mit dem Großkreis gemein, so kann der zweite kein Berührungspunkt sein (Fig. 4).

Wir haben zu zeigen, daß die kürzesten Verbindungen AB und BC ein Stück gemein haben, denn dann und nur dann liegt A zwischen B und C oder C zwischen A und B. Angenommen, sie hätten nur den Endpunkt B gemein, dann würden sie auf verschiedenen Seiten der Kurve liegen, die ja in B den Großkreis durchsetzt. Das widerspräche aber 2., da sie Grenzen von zwei Gebieten sind, die beide links von der Kurve liegen.

4. Ein positiv gekrümmter Bogen habe vier Schnittpunkte A, B, C, D mit einem Großkreis. Sie mögen in dieser Reihenfolge auf der Kurve liegen. Liegt dann C zwischen A und B, so liegt D zwischen C und B.

D liegt nach 3. zwischen B und C oder B zwischen C und D. Wir haben nur den zweiten Fall zu widerlegen. B und C sind nach dem unter 3. ausgeführten keine Berührungspunkte. Die Bögen AB und BC werden also durch den Großkreis getrennt, und der Bogen CD muß wieder auf derselben Seite wie AB liegen, und zwar in dem von der Kurve AB und dem kürzeren Großkreisbogen AB begrenzten Gebiet, da C zwischen A und B liegt. Folglich muß auch D zwischen A und B liegen. Zwischen C und A kann D wegen 3. nicht liegen. Daraus folgt die Behauptung.

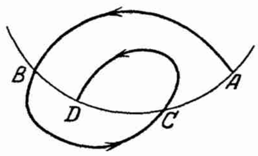

Fig. 6.

5. Ein positiv gekrümmter Bogen schneidet einen Großkreis nur in endlich vielen Punkten.

Angenommen, es gäbe einen Großkreis, der unendlich viele Schnittpunkte mit der Kurve hat; dann hätten diese Punkte einen Häufungspunkt H. Man projiziere nun die Halbkugel mit dem Mittelpunkt H vom Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene in H. Der betrachtete Großkreis geht dann in eine Gerade, die Kurve in eine ebene, nicht negativ gekrümmte Kurve über. Da die Kurve auf der Kugel eine endliche Länge hat, kann sie nur zwischen endlich vielen Paaren aufeinander folgender Schnittpunkte aus der Halbkugel um H herausgehen. Von der Kurve werde alles weggelassen bis zum ersten Schnittpunkt, nach dem das nicht mehr vorkommt. Dann bleibt in der Ebene eine Kurve mit stetiger nicht negativer Krümmung, die eine Gerade in unendlich vielen Punkten mit endlichem Häufungspunkt schneidet. Nach dem Rolleschen Satz hat man nun zwischen je zwei Schnittpunkten eine zu der Geraden parallele Tangente. Beim Durchlaufen der Kurve muß also die Tangente unendlich oft eine feste Richtung annehmen. Wegen des nicht negativen Vorzeichens der Krümmung muß sie sich immer im selben Sinne drehen. Die Gesamtdrehung der Tangente muß daher unbeschränkt sein, die Kurve kann entgegen der Voraussetzung nicht stetig gekrümmt sein.

6. *Es sei ein positiv geodätisch gekrümmter doppelpunktfreier Kurvenbogen* $\mathfrak{k}$ *auf der Kugel und ein beliebiger Großkreis* $\mathfrak{g}$, *der* $\mathfrak{k}$ *in mindestens zwei Punkten trifft, gegeben.* Dann gibt es einen Teilbogen $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{k}$ mit folgenden Eigenschaften: 1. Die Endpunkte K' und K'' von $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$ liegen auf $\mathfrak{g}$. 2. $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$ hat sonst keinen Punkt mit $\mathfrak{g}$ gemein. 3. Alle übrigen Schnittpunkte von $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{g}$ liegen zwischen K' und K''. (K' und K'' sind nach 1. nicht diametral.) *Insbesondere ist auf* $\mathfrak{g}$ *mehr als ein Halbkreis frei von Schnittpunkten.*

Falls nur zwei Schnittpunkte vorhanden sind, folgt die Behauptung aus 1. Wir nehmen an, sie sei für $n-1$ Punkte bewiesen. Die Schnittpunkte der gegebenen Kurve seien $K_1, K_2, \ldots, K_n$ und mögen beim Durchlaufen der Kurve in dieser Reihenfolge angetroffen werden. Verfolgen wir die Kurve zunächst bis zum $n-1$-ten Schnittpunkt K_{n-1}, dann gibt es gemäß unserer Annahme einen Bogen $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$. Seine Endpunkte seien $K_{\nu-1}$ und K_ν. Wir unterscheiden zwei Fälle: 1. $\nu = n-1$ und 2. $\nu < n-1$. Im ersten Fall liegt nach 3. der folgende Schnittpunkt K_n entweder zwischen K_{n-2} und K_{n-1}; dann ist derselbe Bogen $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$ auch für die bis zum Punkt K_n genommene Kurve brauchbar. Oder es ist K_{n-2} zwischen K_{n-1} und K_n; dann ist der Kurvenbogen $K_{n-1}K_n$ ein Bogen $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$ für die Kurve $K_1 K_2 \ldots K_n$. Im zweiten Fall kann wieder der alte Bogen $\mathfrak{k}_\mathfrak{g}$ gebraucht werden, da, wie man durch wiederholte Anwendung von 4. erkennt, alle auf K_ν folgenden Schnittpunkte zwischen $K_{\nu-1}$ und K_ν liegen. Unsere Behauptung ist also auch für Kurven mit n Schnittpunkten, also wegen 5. allgemein richtig.

Das Ergebnis 6. zeigt, daß die positiv geodätisch gekrümmten doppelpunktfreien Kurvenbögen die Voraussetzung des Satzes A′ (§ 2) erfüllen, wenn als Punkt P der Kugelmittelpunkt gewählt wird. Denn, daß auf jedem Großkreis mehr als ein Halbkreis frei von Schnittpunkten bleibt, bedeutet ja, daß sich in der Ebene des Großkreises durch den Kugelmittelpunkt eine Schranke des Durchschnitts der Ebene mit der Kurve legen läßt. Es gibt also nach A′ eine Ebene durch den Mittelpunkt, so daß die Kurve ganz auf einer ihrer Seiten liegt. Das heißt aber, daß die Kurve auf einer Halbkugel liegt.

§ 5.

Geschlossene sphärische Kurven mit nicht negativer geodätischer Krümmung.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des Satzes II′ (§ 1), also des Satzes II. Wir haben zu zeigen, daß geschlossene sphärische Kurven mit nicht negativer geodätischer Krümmung und höchstens einem Doppelpunkt auf einer Halbkugel liegen. Das soll so geschehen, daß die geschlossenen Kurven durch doppelpunktfreie Bögen mit positiver geodätischer Krümmung approximiert werden. Von ihnen ist schon im vorigen Paragraphen gezeigt worden, daß sie auf einer Halbkugel liegen. Die Approximation muß im folgenden Sinne gleichmäßig erfolgen. $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Dann muß ein beliebiger Punkt der zu approximierenden Kurve $\mathfrak{k}$ eine Minimalentfernung $< \varepsilon$ von der approximierenden haben. Ist eine derartige Approximation gelungen, so kann man so schließen: Wir betrachten eine Nullfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots.$ Zu jedem ε_ν wählen wir eine approximierende Kurve $\mathfrak{k}_\nu$. Diese liegt in einer Halbkugel H_ν. Wir wählen eine Halbkugel H, deren Mittelpunkt Häufungspunkt der Mittelpunkte der H_ν ist. Die abgeschlossene Halbkugel H muß $\mathfrak{k}$ enthalten; denn angenommen, ein Punkt R von $\mathfrak{k}$ läge außerhalb, dann hätte er eine positive Entfernung ϱ von H. Unter den Indizes ν läßt sich einer so wählen, daß das zugehörige $\varepsilon_\nu < \frac{\varrho}{2}$ wird, und außerdem der Mittelpunkt von H_ν von dem von H eine Entfernung $< \frac{\varrho}{2}$ besitzt. Dann hätte aber R noch eine Entfernung $> \frac{\varrho}{2} > \varepsilon_\nu$ von H_ν, also erst recht von $\mathfrak{k}_\nu$ im Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{k}_\nu$.

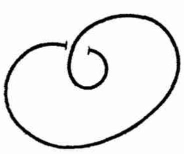

Fig. 7.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß sich die geschlossenen Kurven in der angegebenen Weise approximieren lassen. Zunächst bemerken wir, daß dies durch doppelpunktfreie Kurvenbögen mit nicht negativer geodätischer Krümmung möglich ist. Denn wird von der geschlossenen Kurve, wenn sie doppelpunktfrei ist, ein beliebiges zusammenhängendes Stück mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ weggelassen, so approximiert der restliche Bogen offenbar bis auf ε. Besitzt die Kurve einen Doppelpunkt, so werde ein ebensolches Stück fortgelassen, das den Doppelpunkt im Innern enthält, und das ganz dem einen durch den Doppelpunkt gehenden Zweig der Kurve angehört. Auch in diesem Fall bleibt ein die Kurve bis auf ε approximierender doppelpunktfreier Bogen mit nicht negativer Krümmung. Wir haben nun einen derartigen Bogen durch Bögen positiver Krümmung zu approximeren. Das geschieht durch die linken Parallelkurven[14]) im Abstand $< \varepsilon$. Falls ε genügend klein ist, sind sie ebenfalls doppelpunktfrei. Es bleibt zu zeigen, daß ihre geodätische Krümmung positiv ist. Man erkennt dies leicht, wenn man beachtet, daß der Krümmungskreis der Parallelkurve ein Parallelkreis des Krümmungskreises der ursprüng-

[14]) Die Parallelkurven entstehen dadurch, daß auf den geodätischen Normalen konstante Stücke abgetragen werden.

lichen Kurve im entsprechenden Punkt ist. Es läßt sich dies aber auch analytisch ohne Schwierigkeit einsehen. Machen wir die ursprüngliche Kurve und ihre Parallelkurven zu u-Linien eines Koordinatensystems auf der Kugel. Der Sinn wachsender u sei so gewählt, daß die Kurve wieder zur Linken des berührenden Großkreises liegt. Als v-Linien wählen wir die auf der Kurve senkrechten Großkreise. v sei ihre Bogenlänge. Der Sinn wachsender v muß dann wegen unserer Festsetzung der Kugelorientierung nach links von der u-Linie weisen. Die erste Fundamentalform der Kugel nimmt dann die Gestalt

$$ds^2 = E\,du^2 + dv^2$$

an. Die geodätische Krümmung der u-Linie wird dann:

$$\varkappa_u = -\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E})\ {}^{15)} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Wir haben zu zeigen, daß

$$\frac{\partial \varkappa_u}{\partial v} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{1}{2E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 > 0$$

ist. Hierzu berücksichtigen wir, daß die Gaußsche Krümmung

$$K = -\frac{1}{2E}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{1}{4E^2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 {}^{16)} = \frac{\partial \varkappa_u}{\partial v} - \varkappa_u^2\ {}^{17)} = 1$$

wird. Daraus folgt aber

$$\frac{\partial \varkappa_u}{\partial v} = 1 + \varkappa_u^2 > 0.$$

§ 6.

Beispiel einer geschlossenen Raumkurve mit nicht negativer Windung.

Wir haben eine geschlossene sphärische Kurve mit nicht negativer geodätischer Krümmung anzugeben, die von jedem Großkreis geschnitten wird, und die genau zwei Doppelpunkte besitzt. Wir wählen zwei halbe Großkreise, die die Endpunkte gemein haben, und einen von 0 und π verschiedenen Winkel miteinander bilden. An die Ecken werden kongruente Schleifen mit nicht negativer Krümmung so angesetzt, daß die Tan-

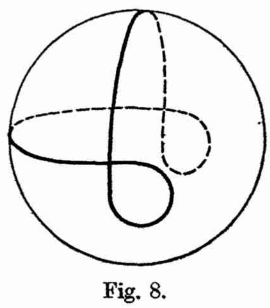

Fig. 8.

---

[15]) Blaschke, a. a. O. S. 90. Es ist $A = \sqrt{E}$ und $B = 1$ zu setzen.

[16]) Blaschke, a. a. O. S. 61. Man hat $F = 0$, $G = 1$ zu setzen.

[17]) Dies folgt auch direkt aus einer Formel von Liouville. Blaschke, a. a. O. S. 126, 4.

gente und die Krümmung sich stetig anschließen. Man überzeugt sich leicht, daß die so entstehende Kurve alle verlangten Eigenschaften besitzt (Fig. 8).

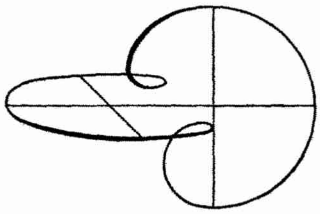

Fig. 9.

Eine Raumkurve, die diese Kurve zum Tangentenbild besitzt, läßt sich folgendermaßen charakterisieren: Sie besteht aus zwei kongruenten Halbkreisen, deren Ebenen gegeneinander gedreht sind. Die auf den die Halbkreise begrenzenden Durchmessern senkrechten Radien liegen in einer Geraden. Die Endpunkte der Halbkreise sind paarweise durch zwei kongruente, nicht negativ gewundene Kurvenstücke verbunden (Fig. 9).

(Eingegangen am 5. 7. 1928.)