Introduciamo ora il concetto di vettore tangente e piano tangente ad una superficie in un punto.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ e $p \in S$. Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile ~~regolare~~ il cui sostegno sia contenuto in S e tale che $\alpha(0) = p$.

E' naturale richiedere che il vettore $\alpha'(0)$ tangente ad $\alpha(s)$ in p sia anche tangente a S.

Definizione Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ e sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ un vettore.

$\underline{v}$ è tangente ad S in p se esiste una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che:

- $\alpha(I) \subseteq S$
- $\alpha(0) = p$
- $\alpha'(0) = \underline{v}$

L'insieme di tutti i vettori tangenti ad S in p si dice cono tangente (perché è un cono (di vertice l'origine) e cioè se $\underline{v} \in C$ allora $\lambda \underline{v} \in C$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Infatti, se $\alpha'(0) = \underline{v}$ ~~basta~~ basta prendere $\beta(s) = \alpha(\lambda s)$. Il sostegno è lo stesso, $\beta(0) = \alpha(0) = p$ e $\beta'(0) = \lambda \alpha'(0) = \lambda \underline{v}$ e dunque $\lambda \underline{v} \in$ cono tangente).

Dimostriamo ora che il cono tangente ad una superficie regolare è in realtà un piano (N.B. un piano è un cono, con vertice qualunque suo punto).

Sia $\underline{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione C^∞, e sia $\underline{X}(q) = p$.

Ricordiamo che: $d\underline{X}_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nella base canonica, ha matrice $\left[\underline{X}_u, \underline{X}_v\right]$

e cioè $d\underline{X}_q(1,0) = \underline{X}_u$, $d\underline{X}_q(0,1) = \underline{X}_v$

<u>Proposizione 1</u> (do Carmo, Prop 1, 2-4)

Sia $\underline{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una param. di una superficie regolare e sia $q \in U$, $p = \underline{X}(q) \in S$.

Allora:

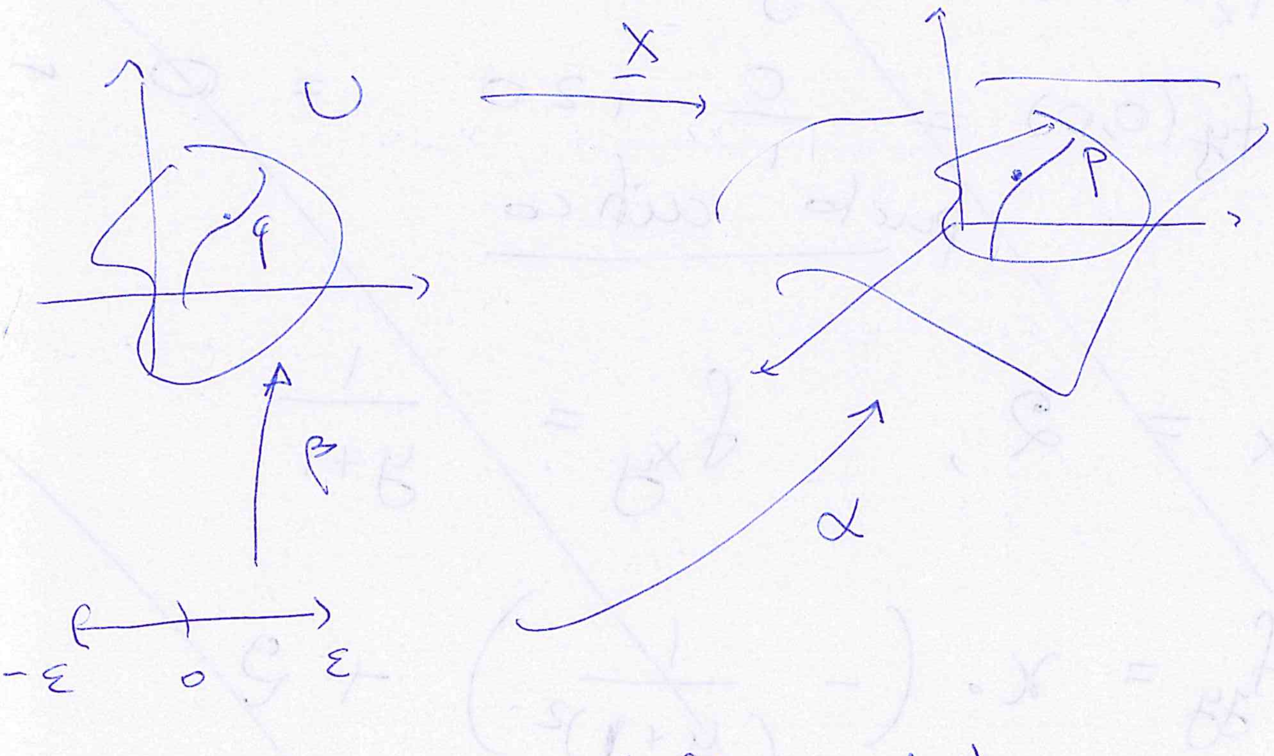
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{cont. tangente} \\ \text{a } S \text{ in } p\end{array} = d\underline{X}_q(\mathbb{R}^2)}$$

cioè un vettore è tangente se e solo se è nell'immagine del differenziale di $\underline{X}$.

<u>Dimostrazione</u>:

Sia $\underline{w}$ tangente, e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$

con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$



$\beta = \underline{X}^{-1} \circ \alpha$ è differenziabile

Infatti, $\underline{x}^{-1}$ è l'inversa di una param. regolare ed è dunque differenziabile

(per definizione: ~~per~~ ~~vasse~~ $\underline{x}^{-1} : \underline{x}(U) \subseteq S \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile significa che esiste una param. $\underline{y} : V \to S$ tale che $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : V \to \mathbb{R}^2$ è differenziabile. Ma poiché $\underline{x}$ è essa stessa una param, basta prendere $\underline{y} = \underline{x}$ e quindi $\underline{x}^{-1} \circ \underline{x} = id_U$ che è certamente differenziabile.

NOTA BENE: il camb. di coord $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$ è sempre diff. per quello che abbiamo visto nella lezione scorsa).

Possiamo dunque scrivere:

$\alpha = \underline{x} \circ \beta$ dove β è differenziabile

Allora:

$$\underline{w} = \alpha'(0) = \frac{d}{ds}\left[\underline{x} \circ \beta\right]\Big|_{s=0} =$$

$$= \beta_1'(0) \cdot \underline{x}_u(q) + \beta_2'(0) \cdot \underline{x}_v(q) \in \operatorname{Im} d\underline{x}_q$$

Viceversa, sia $\underline{w} = d\underline{X}_q(\underline{v})$, dove $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\gamma(t) = t\,\underline{v} + q \qquad \text{curva in } U$$

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U \quad e \quad \gamma(0) = q$$

e si calcola come prima

$$\frac{d}{dt}(\underline{X}\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0} = \underline{w}$$

dunque $\underline{w}$ è tangente alla curva $\underline{X}\circ\gamma$.

ATTENZIONE

$d\underline{X}_q(\mathbb{R}^2)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, che si chiama spazio tangente a S in P.

Poiché $\underline{X}_q$ è regolare, ha dimensione 2

Si indica con T_pS.

Il piano affine che passa per P ed è parallelo a T_pS si dice "piano tangente".

Osserviamo che, nelle notazioni precedenti:

(figura a pag. 3):

- $\{\underline{X}_u(q), \underline{X}_v(q)\}$ è una <u>base</u> di $T_q S$
- se $\underline{w} = \alpha'(0)$ e $\beta = \underline{X}^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$

scriviamo $\beta(t) = (u(t), v(t))$.

allora abbiamo visto che:

$$\underline{w} = u'(0)\,\underline{X}_u + v'(0)\,\underline{X}_v$$

<u>cioè</u>: le coordinate di $\underline{w}$ nella base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$ sono $\underline{w} = (u'(0), v'(0))$

e quindi <u>non</u> dipendono da α ma solo dalla sua derivata in 0.

per esempio, se S^2 è la sfera e
N è ~~tp~~ il polo nord, lo ~~sp~~ ~~spazio tan~~
spazio tangente è il piano xy, mentre
il piano tangente ha equazione $z = 1$.
Nel do Carmo la distinzione non è sempre
ben messa in evidenza.

C'è una caratterizzazione geometrica della
mappa lineare $d\underline{x}_q$:

sia $\underline{w} \in \mathbb{R}^2$ un vettore e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$
una curva diff. passante per $q \in U$ tale che
$\alpha'(0) = \underline{w}$. Allora $\underline{X} \circ \alpha$ è una curva
nello spazio ($\underline{X} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$)
e si ha:

$$d\underline{x}_q(\underline{w}) = (X \circ \alpha)'(0)$$

(questa è la dimostrazione che abbiamo appena
fatto). Cioè, per trovare l'immagine
di un vettore tangente ad una curva, possiamo prendere il
vettore tangente alla curva immagine.

Questa è la definizione che diamo ~~~~ per mappe fra superfici.

<u>Definizione</u> sia $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ una funzione differenziabile, e sia $p \in S_1$.
Sia $\underline{w} \in T_p S_1$ e sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ una curva tale che $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$

Poniamo (per definizione)

$$d\varphi_p(\underline{w}) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

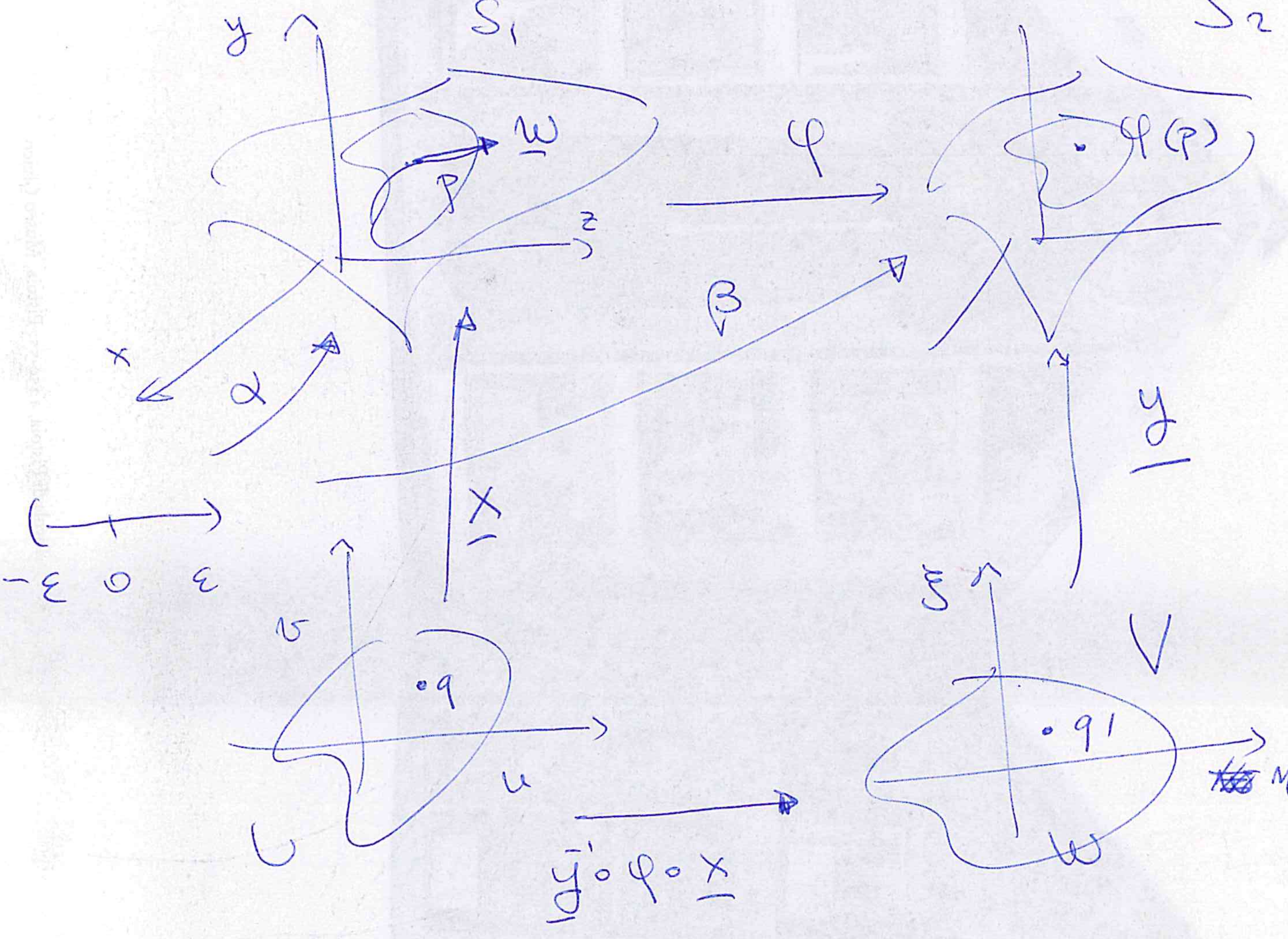
In questo modo abbiamo una funzione:

$$d\varphi_p : T_p S_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

<u>Proposizione 2</u> (do Carmo, prop 2, 2-4)
$d\varphi_p$ è <u>ben definita</u> (non dipende dalla scelta di α) ed è <u>lineare</u>.

$$\boxed{d\varphi_p \text{ è il } \underline{\text{differenziale}} \text{ di } \varphi \text{ in } p}$$

Dimostrazione: disegniamo con cura la situazione. Le lettere scelte dal do Carmo sono particolarmente scomode. Useremo lettere leggermente diverse:



Sia $\underline{w} \in T_p S_1$, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_1$ $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$

Per calcolare, usiamo due parametrizz. locali per S_1 e S_2, intorno a p e $\varphi(p)$

$\{\underline{x}_u(q), \underline{x}_v(q)\}$ base di T_pS_1

$\{\underline{y}_\eta(q'), \underline{y}_\xi(q')\}$ base di $T_{\varphi(p)}S_2$

Come prima, scriviamo:

- $\underline{x}^{-1}\circ\alpha(t) = (u(t), v(t))$ α in coord. locali
- $\underline{y}^{-1}\circ\varphi\circ\underline{x} = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ φ data in coord. locali

dobbiamo calcolare $\beta'(0) = (\varphi\circ\alpha)'(0)$

osserviamo che:

$$(\underline{y}^{-1}\circ\varphi\circ\underline{x})\circ(\underline{x}^{-1}\circ\alpha) = \underline{y}^{-1}\circ\varphi\circ\alpha = \underline{y}^{-1}\circ\beta$$

e cioè β in coord locali. Dunque:

$$\underline{y}^{-1}\circ\beta(t) = (\varphi_1(u(t),v(t)), \varphi_2(u(t),v(t)))$$

le coord di $\beta'(0)$ nella base $\{\underline{y}_\eta(q'), \underline{y}_\xi(q')\}$ si ottengono derivando $\underline{y}^{-1}\circ\beta$ e si ha:

$$\beta'(0) = \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\cdot u'(0) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}v'(0), \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}v'(0)\right]$$

che si può scrivere come:

$$d\varphi_p \underline{w} = \beta'(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

che mostra che:

① $d\varphi_p \underline{w}$ dipende solo dalle derivate di φ e dalle coordinate di $\underline{w}$ e <u>non</u> dalla curva $\alpha(t)$ scelta (solo da $\alpha'(0) = \underline{w}$)

② la funzione $d\varphi_p : T_p S_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)} S_2$ è <u>lineare</u> e nelle basi $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ e $\{\underline{y}_\eta, \underline{y}_\xi\}$ è data dalla <u>matrice</u> <u>Jacobiana</u> della mappa φ in coord. locali, cioè da $J(\underline{y}^{-1} \circ \varphi \circ \underline{x})$