MARTEDÌ 26/03/2019

①

Vediamo ora alcuni esempi di superfici.

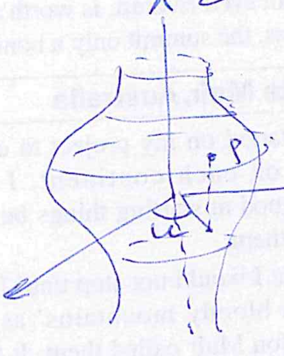
a. Superfici di rotazione.

Sia C una curva regolare nel piano xz che non incontra l'asse z, parametrizzata da

$$\begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}$$

con $a < v < b$, $f(v) > 0$ (non incontra l'asse z)

Ruotiamo intorno all'asse z



Chiamando u l'angolo fra l'asse x e la proiezione di p sul piano xy otteniamo le equazioni parametriche:

$$X(u,v) = (f(v)\cos u,\ f(v)\sin u,\ g(v))$$

- ogni curva $v = \text{costante}$ è una circonf. orizzontale di raggio $f(v)$ con centro sull'asse z
- ogni curva $u = \text{costante}$ è la rotazione di C di angolo u

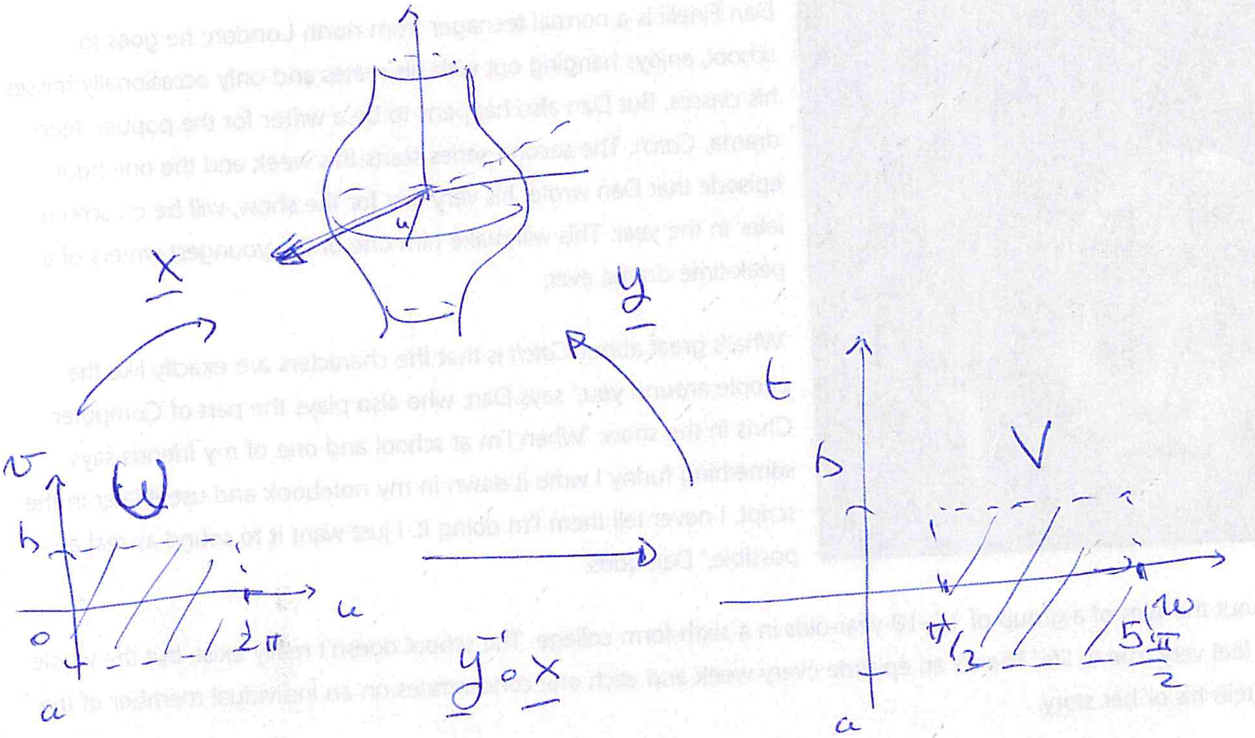
Il dominio di X: $(0, 2\pi) \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

e X copre tutta la superficie meno un meridiano.

ruotando $\underline{\alpha}$ di $\pi/2$ s'ottiene un'altra param. ②

$$\underline{y}(w,t) = \left(f(t)\cos w,\ f(t)\sin w,\ g(t) \right)$$

$$\underline{y} : \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2} \right) \times (a,b)$$



in coordinate locali:

$$\underline{y}^{-1} \circ \underline{X}(u,v) = \left(u + \tfrac{\pi}{2},\ v \right)$$

e cioè il camb. di coordinate è

$$\begin{cases} t = v \\ w = u + \pi/2 \end{cases}$$

(chiaramente è C^∞ e invertibile)

per provare $\underline{X}$ param occorre dimostrare!

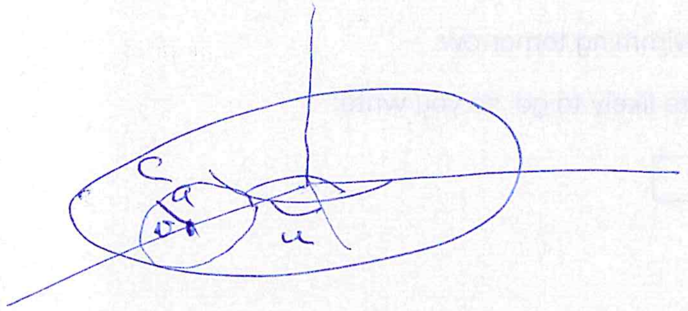
①, ③ (esercizio)

② leggere do Carmo

b. Toro il toro si ottiene ruotando una circonferenza intorno ad una retta esterna ad essa. Fissiamo $0 < r < a$ e sia C = circonferenza nel piano xz

- di centro $(a, 0, 0)$
- di raggio r

C non incontra l'asse z e notiamo:



C ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a + r \cos v \\ z = a + r \operatorname{sen} v \end{cases}$$

e quindi:

$$\underline{X}(u, v) = [(a + r\cos v)\cos u,\ (a + r\cos v)\operatorname{sen} u,\ a + r \operatorname{sen} v]$$

- i meridiani u = costante sono circonferenze verticali
- i paralleli v = costante sono circonferenze orizzontali: per $-\pi/2 < v < \pi/2$ <u>esterne</u>

  per $\pi/2 < v < \frac{3\pi}{2}$ <u>interne</u>

Calcoliamo il piano tangente ad una sup di rotazione. È generato da:

$$\underline{X}_u = \left(-f(v)\,\mathrm{sen}\,u \,,\; f(v)\cos u \,,\; 0 \right)$$

$$\underline{X}_v = \left(f'(v)\cos u \,,\; f'(v)\,\mathrm{sen}\,u \,,\; g'(v) \right)$$

poniamo: $N = \cancel{\underline{X}_u \wedge \underline{X}_u} \dfrac{\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v}{\|\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v\|}$

N si dice vettore normale ed è sempre diverso da 0 perché $\underline{X}_u, \underline{X}_v$ sono lin. ind.

$\{\underline{X}_u, \underline{X}_v, N\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, che varia al variare del punto $p \in S$.

(Tipo triedro di Frenet) - Studieremo in dettaglio questa base.

Per capire il piano tangente, basta calcolare $\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v$, cioè la direzione di N. T_pS è perpendicolare a N.

In qs caso si ha:

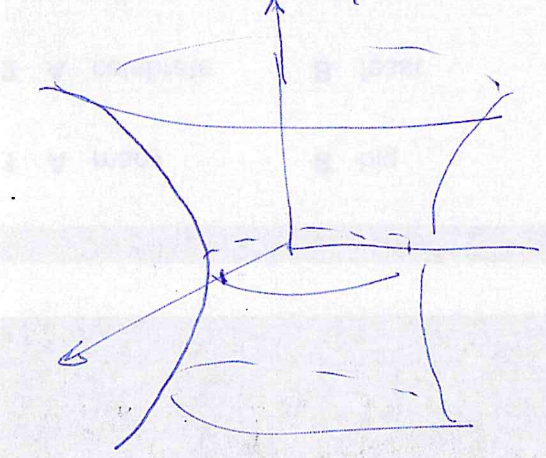
$$\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v = \big(f(v)\,g'(v)\cos u,\ f(v)\,g'(v)\sin u,\ -f(v)\,f'(v) \big)$$

poiché $f(v) > 0$, il piano tg è <u>orizzontale</u> per $g'(v) = 0$

se invece $f'(v) = 0$ allora il vettore normale è orizzontale (nel piano xy) e quindi il piano tg è <u>verticale</u>.

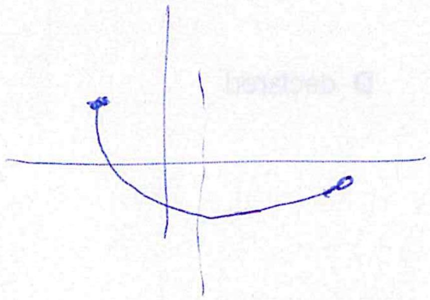
<u>Esercizio</u>: calcolare i piani tg del toro e verificare quanto detto

$\boxed{\underline{C}.\ \text{Catenoide}}$ sia C la curva data da $\begin{cases} x = \cosh v \\ z = v \end{cases}$



rotando si ottiene la <u>catenoide</u>

la curva C si chiama catenaria, perché è la curva che si ottiene fissando una catena (filo di massa pesante uniforme) in due punti. Si dimostra che la curva è data dal grafico del coseno iperbolico

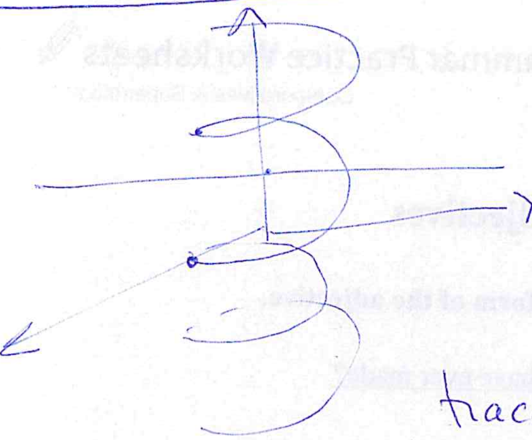


La superficie di rotazione si chiama catenoide

$$S: (\cosh v \cdot \cos u, \cosh v \cos u, v)$$

sembra un iperboloide, ma non lo è. Ritroveremo qs esempio nel seguito.

Esempio: elicoide (non di rotazione) 7



$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = a\sin u \\ z = bu \end{cases}$$ elica circolare

per ogni pt dell'elica, tracciamo la retta orizzontale che incontra l'asse z, e cioè la retta fra: $(0,0,bu)$ e $(a\cos u, a\sin u, bu)$

dunque:

$$\underline{X}(u,v) = (av\cos u,\ av\sin u,\ bu)$$

notiamo: u = costante → retta orizzontale (lo sapevamo)

v = costante → elica, di raggio av e passo $2\pi b$

$$\underline{X}_u = \begin{bmatrix} -av\sin u & a\cos u \\ av\cos u & a\sin u \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

12 → $-a^2 v$ sempre rk 2.

13 → $ab\cos u$

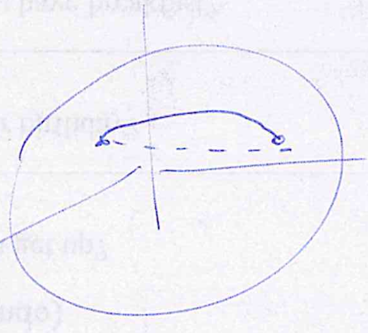
23 → $-ab\sin u$

La prima forma (quadratica) fondamentale (8)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Vogliamo studiare S dal punto di vista metrico, cioè vogliamo introdurre una distanza fra i punti di S. Ovviamente, possiamo usare la distanza come sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Ma vogliamo fare geometria "intrinseca" e cioè considerare solo i pti sulla superficie.

Per esempio, sulla sfera S^2 vogliamo considerare come distanza non la lunghezza della corda ma la lunghezza del cammino minimo sulla sfera che congiunge i punti, e cioè un arco di cerchio massimo



Quindi: sia $\alpha : [a,b] \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva. Come si calcola la lunghezza di α?

Questo lo sappiamo:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Osserviamo che: $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} S$

e quindi per calcolare la sua lunghezza, basta sapere la lunghezza dei vettori in $T_{\alpha(t)} S$.

Il modo più semplice è avere un prodotto scalare (e cioè una forma bilineare simmetrica non degenere definita positiva, oppure la forma quadratica associata).

Sia $p \in S$. Poiché $T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$, sullo spazio tangente è indotto un prodotto scalare, restrizione di quello di $\mathbb{R}^3$.

per $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in T_p S$ poniamo:

$$\langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle_p = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle$$

come vettori di $\mathbb{R}^3$

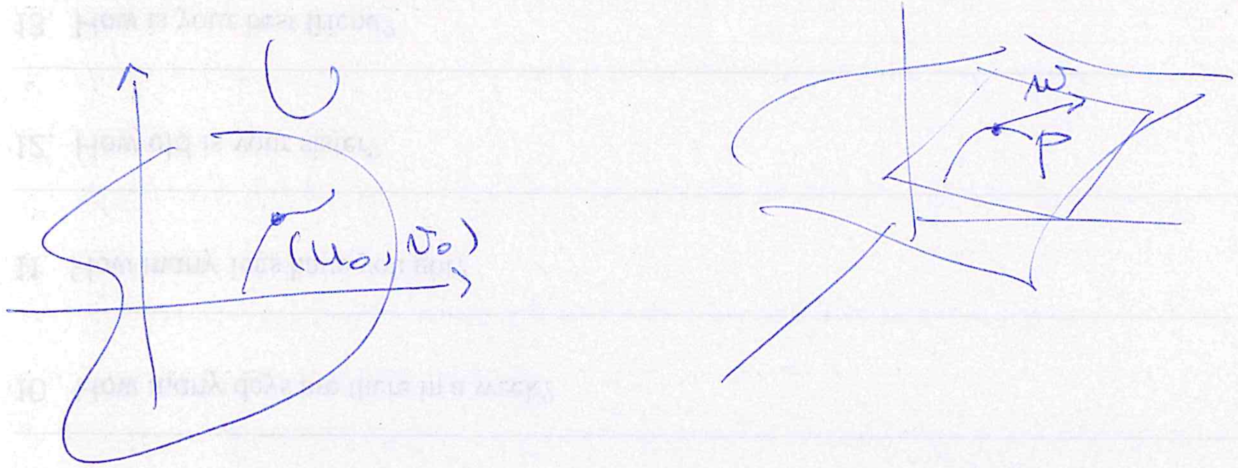
Definizione $I_p : T_p S \longrightarrow \mathbb{R}$, la forma quadratica associata, data da

$$I_p(\underline{w}) = \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle_p = \|w\|^2$$

è detta prima forma fondamentale in p

Detta così, sembra che non sia successo niente, perché usiamo comunque $\mathbb{R}^3$. Il punto ~~è~~ è che possiamo calcolare I_p dalla param. di S.

Sia $\underline{X} : U \longrightarrow S$ una param.,



$$\underline{w} = \alpha'(0) \quad \text{dove} \quad \alpha(t) = \underline{X}(u(t), v(t))$$

è una curva su S e $(u(t), v(t))$ la sua espressione in coord locali. Sappiamo che

$$\underline{w} = \alpha'(0) = u'(0) \cdot \underline{X}_u + v'(0) \cdot \underline{X}_v$$

dunque:

$$I_p(w) = \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle =$$

$$= \langle \underline{X}_u, \underline{X}_u \rangle \cdot (u'(0))^2$$

$$+ 2 \langle \underline{X}_u, \underline{X}_v \rangle \cdot (u'(0))(v'(0))$$

$$+ \langle \underline{X}_v, \underline{X}_v \rangle (v'(0))^2$$

Poniamo:

$$E(u_0, v_0) = \langle \underline{X}_u, \underline{X}_u \rangle_p$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \underline{X}_u, \underline{X}_v \rangle_p$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \underline{X}_v, \underline{X}_v \rangle_p$$

Nella base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$ si ha:

se $\underline{w} = (a, b)$, allora:

$$I_p(\underline{w}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

cioè la matrice $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ è la matrice della forma quadratica (del prodotto scalare) su $T_p S$ nella base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$.

E, F, G sono funzioni differenziabili, definite su U.

I_p, al variare di p, è una famiglia di prodotti scalari, che varia in modo differenziabile.

12

Esempio sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un piano passante per $P_0 = (x_0 y_0 z_0)$ e generato dai vettori ortonormali $\underline{w}_1, \underline{w}_2$. Allora:

$$X(u,v) = P_0 + u\underline{w}_1 + v\underline{w}_2$$

dunque:

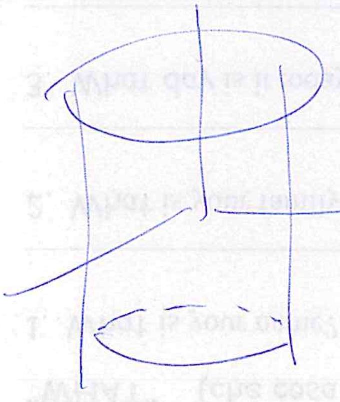
$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle = 1$$

$$F = \qquad\qquad = 0$$

$$G = \qquad\qquad = 1$$

costantemente. In questo caso, stiamo dicendo che un vettore $\underline{w} = (a,b)$ nella base $\{w_1, w_2\}$ ha lunghezza (al quadrato) pari a a^2+b^2. Questo è il teorema di Pitagora.

Esempio: cilindro circolare retto



$$\underline{X}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

$$\underline{X}_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$$

$$\underline{X}_v = (0, 0, 1)$$

e nuovamente $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$

Esercizio calcolare la prima forma fondamentale per tutte le superfici che conoscete.

Con queste notazioni:

se $\alpha : I \longrightarrow S$ è tutta contenuta nell'intorno coordinato coperto da una param. $\underline{X}$, possiamo scrivere $\alpha(t) = \underline{X}(u(t), v(t))$

e quindi:

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E \cdot u'^2 + 2F u'v' + G v'^2}\, dt$$

e in effetti l'arcolunghezza $s(t)$ vale:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2}\, d\tau$$

se pensiamo $s(t) = \int_a^t ds$

cioè ds è "l'elemento di arcolunghezza"

(poco chiaro cosa vuol dire)

allora si scrive di solito:

$$(*) \quad \boxed{ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

che significa ("dividendo per dt^2")

$$(**) \quad \boxed{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

Nota bene: $(*)$ è solo un modo di scrivere,

$(**)$ ha un significato preciso (ed è vera).

La notazione è molto tradizionale e, se usata in modo opportuno, è molto utile. Vedremo la sua utilità quando faremo i camb. di coordinate.