6 Un esempio: l'analisi nonstandard

Questo paragrafo is dedicato ad un esempio che analizzeremo un po' in dettaglio perché is utile per impratichirsi con la relazione di elementary substructure. Questo esempio is comunque culturalmente interessante. Infatti dà rigore matematico al formalismo usato ai tempi di Leibniz e Newton per fare analisi matematica. Allora l'analisi matematica era fondata sui concetti di infinito e di infinitesimo, nozioni che al tempo erano mal definite se non contradditore. Solo dalla metà dell'ottocento i matematici della generazione di Weistraß rimediarono a questi vizi di forma fondando l'analisi matematica sul concetto di limite. L'analisi non standard invece recupera la dignità matematica degli infiniti and infinitesimi usando il concetto di estensione elementare. Fu scoperta verso la metà del novecento da Abraham Robinson.

Fissiamo un po' di notazione valida per tutto il paragrafo. Il linguaggio che useremo contiene

1. un simbolo di relazione n-aria for every $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
2. un simbolo di funzione n-aria for every $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

Chiameremo $\mathbb{R}$, con la naturale interpretazione dei simboli, il modello standard dell'analisi reale.

Quindi lo stesso simbolo denota elementi del linguaggio e l'interpretazione in $\mathbb{R}$. Non si tratta di un abuso di linguaggio, sono proprio la stessa cosa !

Assumiamo che esista una estensione elementare propria di $\mathbb{R}$ e fissiamone una che indicheremo con ${}^*\mathbb{R}$. L'esistenza di questa estensione verrà dimostrata più avanti.

L'interpretazione dei simboli f and X in ${}^*\mathbb{R}$ verrà indicata con ${}^*f$ e ${}^*X$. Gli elementi di ${}^*\mathbb{R}$ verranno chiamati iperreali, gli elementi di $\mathbb{R}$ li chiameremo (iper)reali standard, quelli in ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ li chiameremo (iper)reali nonstandard.

È immediato verificare che ${}^*\mathbb{R}$ is un campo ordinato. Infatti, le operazioni di somma e prodotto appartengono al linguaggio, come pure la relazione d'ordine. La proprietà di essere un campo ordinato is traducibile in un insieme di enunciati che, essendo veri in $\mathbb{R}$, saranno veri anche in ${}^*\mathbb{R}$.

Un iperreale c si dice infinitesimo se $|c| < \varepsilon$ for every ε standard positivo. Un iperreale c si dice infinito se $k < |c|$ for every k standard, altrimenti si dice finito. Quindi se c is infinito c^{-1} is infinitesimale. Ovviamente, tutti i reali standard sono finiti e 0 is l'unico reale standard infinitesimo.

2.37 Lemma *Esistono iperreali nonstandard infiniti and infinitesimi non nulli.*

Proof Sia $c \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ e supponiamo che c non sia infinito, altrimenti c e c^{-1} dimostrano il lemma. Quindi l'insieme $\{a \in \mathbb{R} : c < a\}$ is un insieme non vuoto e limitato di reali. Sia $b \in \mathbb{R}$ l'estremo inferiore di questo insieme. Mostriamo che $b - c$ is infinitesimo non nullo. Non is nullo perchis $c \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Inoltre, se per assurdo che $\varepsilon < |b - c|$ for some ε standard positivo, allora $c < b - \varepsilon$, oppure $b + \varepsilon < c$, (a seconda se $c < b$ o $b < c$). Entrambe queste possibilità contraddiocono le proprietà dell'estremo inferiore. $\square$

L'esistenza di iperreali nonstandard infiniti prova che ${}^*\mathbb{R}$ non is un campo archimedeo: gli interi standard non sono cofinali in ${}^*\mathbb{R}$. Si osservi che però, per elementarità, gli interi nonstandard ${}^*\mathbb{Z}$ sono cofinali in ${}^*\mathbb{R}$: nella prospettiva di chi vive in ${}^*\mathbb{R}$, si tratta di un normalissimo campo archimedeo.

La dimostrazione del seguente lemma is lasciata al lettore.

2.38 Lemma *Gli infinitesimi sono chiusi per somma prodotto e sono anche chiusi rispetto alla moltiplicazione per reali standard.*

La completezza di Dedekind is un'altra proprietà fondamentale di $\mathbb{R}$ che non vale in ${}^*\mathbb{R}$. Questa dice che ogni sottoinsieme limitato superiormente ha un estremo superiore. In ${}^*\mathbb{R}$ non vale: infatti l'insieme degli infinitesimi is ovviamente limitato ma, per il lemma 2.38, non ha estremo superiore. Quindi la completezza di Dedekind *non* is una proprietà del prim'ordine. Comunque in casi particolari is preservata nel passaggio dai reali standard agli iperreali. Come succede spesso, proprietà che nel modello standard valgono per tutti gli insiemi valgono in ${}^*\mathbb{R}$ solo per gli insiemi definibili.

2.39 Lemma *Ogni sottoinsieme di ${}^*\mathbb{R}$ di arietà 1, definibile (anche con parametri), e limitato superiormente (in ${}^*\mathbb{R}$) ha un estremo superiore.*

Si noti che il lemma si riferisce a insiemi i definibili con parametri in ${}^*\mathbb{R}$, altrimenti la dimostrazione sarebbe immediata.

Proof Sia x una singola variabile, a una tupla di parametri in ${}^*\mathbb{R}$ e sia $\varphi(z,x)$ una formula pura. Dobbiamo mostrare che se $\varphi(a,{}^*\mathbb{R})$ is limitato allora ha un estremo superiore. La seguente formula $\psi(z,y)$ dice che y is un maggiorante dell'insieme definito da $\varphi(z,x)$ con z una tupla di parametri:

$$\psi(z,y) \quad = \quad \forall x \left[\varphi(z,x) \to x \leq y\right].$$

La seguente formula $\xi(z,w)$ dice che w is l'estremo superiore (il minimo dei maggioranti) dell'insieme definito da $\varphi(z,x)$.

$$\xi(z,w) \quad = \quad \psi(z,y) \ \wedge \ \forall y \left[\psi(z,y) \to w \leq y\right].$$

Quindi dobbiamo mostrare che in ${}^*\mathbb{R}$ vale $\exists y\, \psi(z,y) \ \to \ \exists w\, \xi(z,w)$. Questa is una formula del prim'ordine che vale in $\mathbb{R}$ is quindi vale anche in ogni sua estensione elementare. □

Definiamo su ${}^*\mathbb{R}$ una relazione di equivalenza: scriveremo $a \approx b$ se $a - b$ is infinitesimo. Che sia effettivamente una relazione di equivalenza, segue facilmente dal lemma 2.38. La classe di equivalenza di c si chiama monade di c, in onore di Leibniz.

2.40 Lemma *Se c is un iperreale finito, nella monade di c esiste un'unico reale.*

Proof Per l'esistenza is sufficiente scorrere la dimostrazione del lemma 2.37 e osservare che il reale standard b is tale che $b \approx c$. Per l'unicità osserviamo che se $b_1 \approx b_2$ sono entrambi standard, allora $b_1 - b_2$ is un infinitesimo standard, quindi 0.

□

Gli iperreali che non sono infiniti si dicono finiti. Se c is finito, quell'unico reale standard nella monade di c si chiama parte standard di c e si denota con $\mathrm{st}(c)$.

Si noti che nel seguente lemma le espressioni alla sinistra si formalizzano direttamente in enunciati del prim'ordine quindi valgono in $\mathbb{R}$ se e solo se valgono in

${}^*\mathbb{R}$.

2.41 Proposition *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for every $a, l \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti equivalenze.*

a. $\lim_{x \to +\infty} fx = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c)$ *is infinito positivo for every $c > 0$ infinito.*

b. $\lim_{x \to +\infty} fx = l \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c) \approx l$ *for every $c > 0$ infinito.*

c. $\lim_{x \to a} fx = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c)$ *is infinito positivo for every $c \approx a \neq c$.*

d. $\lim_{x \to a} fx = l \quad \Leftrightarrow \quad {}^*f(c) \approx l$ *for every for every $c \approx a \neq c$.*

Proof Dimostriamo d e lasciamo le altre per esercizio. Per dimostrare la direzione $\Rightarrow$ assumiamo la parte sinistra dell'equivalenza d e la riscriviamo come formula del prim'ordine:

1. $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \Big[0 < |x - a| < \delta \ \ \to \ \ |fx - l| < \varepsilon\Big].$$

La nostra ipotesi dice che formula 1 is vera in $\mathbb{R}$, o equivalentemente in ${}^*\mathbb{R}$. Abbiamo usato alcune abbreviazioni che supponiamo il lettore sappia tradurre in formule e per avvicinarci alla notazione usata in analisi useremo le lettere ε e δ come variabili. I simboli $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\delta}$ denoteranno parametri.

Verifichiamo ora che ${}^*f(c) \approx l$ vale for every $c \approx a \neq c$, ovvero che $|{}^*fc - l| < \dot{\varepsilon}$ for every $\dot{\varepsilon}$ standard positivo. Fissiamo $\dot{\varepsilon}$ standard positivo, sia $\dot{\delta}$ un reale standard ottenuto dalla verità di 1 in $\mathbb{R}$. Ora per elementarità otteniamo

$$ {}^*\mathbb{R} \vDash \forall x \Big[0 < |x - a| < \dot{\delta} \ \ \to \ \ |fx - l| < \dot{\varepsilon}\Big],$$

dove $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\delta}$ ora stanno per parametri. Se $a \approx c \neq a$, allora $0 < |c - a| < \dot{\delta}$ is sicuramente soddisfatta (perché $\dot{\delta}$ is standard). Quindi da 1, otteniamo $|{}^*fc - l| < \dot{\varepsilon}$.

Per dimostrare la direzione $\Leftarrow$ supponiamo 1 sia falsa. Ovvero, in $\mathbb{R}$ vale

2. $$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \Big[0 < |x - a| < \delta \ \ \wedge \ \ \varepsilon \leq |fx - l|\Big],$$

vogliamo dimostrare che ${}^*f(c) \not\approx l$ for some $c \neq a$ infinitamente vicino ad a. Fissiamo un $\dot{\varepsilon}$ che testimonia la verità di questa formula in $\mathbb{R}$, un reale standard dunque. Ora, per elementarità osserviamo che

$$ {}^*\mathbb{R} \vDash \forall \delta > 0\ \exists x \Big[0 < |x - a| < \delta \ \ \wedge \ \ \dot{\varepsilon} \leq |fx - l|\Big].$$

Quindi fissiamo un arbitraio $\dot{\delta}$ infinitesimo. Otteniamo

$$ {}^*\mathbb{R} \vDash \exists x \Big[0 < |x - a| < \dot{\delta} \ \ \wedge \ \ \dot{\varepsilon} \leq |fx - l|\Big].$$

Un qualsiasi c che testimonia la verità di questa formula in ${}^*\mathbb{R}$ is tale che $c \approx a \neq c$ e contemporaneamente $\varepsilon \leq |{}^*fc - l|$, ma $\dot{\varepsilon}$ is stato scelto standard, quindi ${}^*fc \not\approx l$. □

Il seguente corollario is immediato.

2.42 Corollary *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ the following are equivalent:*

a. *f is continua*

b. *${}^*f(a) \approx {}^*f(c)$ for every for every a standard e ogni iperreale $c \approx a$;*

È importante nel corollario qui sopra restringere c a iperreali *finiti* altrimenti otteniamo una proprietà più forte:

2.43 Proposition *Per ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ the following are equivalent:*

a. *f is uniformemente continua;*

b. *${}^*f(a) \approx {}^*f(b)$ for every coppia di iperreali $a \approx b$.*

Proof Dimostriamo a ⇒ b. Ricordiamo che f is uniformemente continua se

1. $$\mathbb{R} \vDash \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \, \Big[|x - y| < \delta \ \to \ |fx - fy| < \varepsilon \Big].$$

Assumiamo a e fissiamo $a \approx b$. Vogliamo mostrare che $|{}^*f(a) - {}^*f(b)| < \dot{\varepsilon}$ for every $\dot{\varepsilon}$ standard positivo. Fissato $\dot{\varepsilon}$ standard positivo, sia $\dot{\delta}$ un reale standard ottenuto dalla validità di 1 in $\mathbb{R}$. Ora per elementarità otteniamo

2. $${}^*\mathbb{R} \vDash \forall x, y \, \Big[|x - y| < \dot{\delta} \ \to \ |fx - fy| < \dot{\varepsilon} \Big].$$

In particolare

$${}^*\mathbb{R} \vDash \ |a - b| < \dot{\delta} \ \to \ |fa - fb| < \dot{\varepsilon}.$$

Poiché $a \approx b$ allora $|a - b| < \dot{\delta}$ per qualunque $\dot{\delta}$ standard. Quindi $|{}^*f(a) - {}^*f(b)| < \dot{\varepsilon}$.

Per dimostrare b ⇒ a neghiamo a

3. $$\mathbb{R} \vDash \exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x, y \, \Big[|x - y| < \delta \ \wedge \ \varepsilon \leq |fx - fy| \Big].$$

Vogliamo trovare $a \approx b$ such that $\dot{\varepsilon} \leq |{}^*f(a) - {}^*f(b)|$ for some $\dot{\varepsilon}$ standard positivo. Sia $\dot{\varepsilon}$ un reale standard che testimonia la verità di 3 in $\mathbb{R}$. Per elementarità otteniamo

$${}^*\mathbb{R} \vDash \forall \delta > 0 \, \exists x, y \, \Big[|x - y| < \delta \ \wedge \ \dot{\varepsilon} \leq |fx - fy| \Big].$$

Quindi possiamo fissare un arbitrario infinitesimo $\dot{\delta} > 0$ and ottenere $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ such that

$${}^*\mathbb{R} \vDash |a - b| < \dot{\delta} \ \wedge \ \dot{\varepsilon} \leq |fa - fb|.$$

Poiché $\dot{\delta}$ is infinitesimo, $a \approx b$ come richiesto per negare b. □

La seguente proposizione is immediata conseguenza della proposizione 2.41

2.44 Proposition *Per ogni funzione unaria f e for every a standard, the following are equivalent.*

a. *f is differenziabile in a. Si noti questo vale in $\mathbb{R}$ se e solo se valge in ${}^*\mathbb{R}$.*

b. *for every h infinitesimo il rapporto*
$$\frac{f(a) - f(a+h)}{h}$$
is finito e la sua parte standard is indipendente da h.

2.45 Exercise Si dimostri che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is una funzione iniettiva allora ${}^*fa \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$ for every $a \in {}^*\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{R}$. □

2.46 Exercise Si dimostri che the following are equivalent for every insieme $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. X is un insieme finito;

2. ${}^*X = X$. □

2.47 Exercise Si dimostri che the following are equivalent for every insieme $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. X is un aperto nell'usuale topologia di $\mathbb{R}$;
2. $b \approx a \in {}^*X \quad \Rightarrow \quad b \in {}^*X$ for every a standard e b arbitrario. □

2.48 Exercise Si dimostri che the following are equivalent for every insieme $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. X is un chiuso nell'usuale topologia di $\mathbb{R}$;
2. $a \in {}^*X \quad \Rightarrow \quad \mathrm{st}a \in {}^*X$ for every finito a. □

2.49 Exercise Si dimostri che $\mathbb{R}$ and $\varnothing$ sono gli unici due sottoinsiemi $X \subseteq \mathbb{R}$ such that:

$b \approx a \in {}^*X \quad \Rightarrow \quad b \in {}^*X$ for every coppia di iperreali a, b. □

2.50 Exercise Si dimostri che $|\mathbb{R}| \leq |{}^*\mathbb{Q}|$ ovvero che ${}^*\mathbb{Q}$ ha almeno la cardinalità del continuo. (Suggerimento: si definisca una funzione iniettiva $f : \mathbb{R} \to {}^*\mathbb{Q}$ scegliendo nella monade di ogni reale standard un razionale nonstandard.) □