Sia S una superficie regolare e sia $p \in S$, $\underline{x} : U \longrightarrow S$ una param. locale intorno a p.
Abbiamo definito la I forma fondamentale che ha coefficienti $E = \langle x_u, x_u \rangle$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$
$G = \langle x_v, x_v \rangle$.
La I forma fondamentale è un prodotto scalare sullo spazio tangente o, meglio, una famiglia di prodotti scalari che variano al variare del piano tangente.
La I forma controlla varie proprietà metriche della superficie. Abbiamo visto come si calcola la lunghezza di una curva tracciata sulla superficie. Vediamo adesso due altre quantità geometriche: angoli e area.

Possiamo definire l'angolo fra due curve nel modo seguente:
siano $\alpha, \beta : I \longrightarrow S$ che si incontrano in $p = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$.
L'angolo formato è dato da θ,

dove:

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t_0)\|}$$

il membro destro si calcola con la I forma

In particolare le curve coordinate date da $u=$ costante e $v=$ costante hanno angolo:

$$\cos\varphi = \frac{\langle X_v, X_u \rangle}{\|X_v\| \cdot \|X_u\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

e quindi sono ortogonali $\iff F=0$

<u>Area</u> sia S una superficie, $\underline{X} : U \longrightarrow S$ parametrizzazione e $Q \subseteq U$ una regione <u>limitata</u> (e quindi in particolare la chiusura di Q è compatta)

La funzione:

$$\|X_u \wedge X_v\| : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

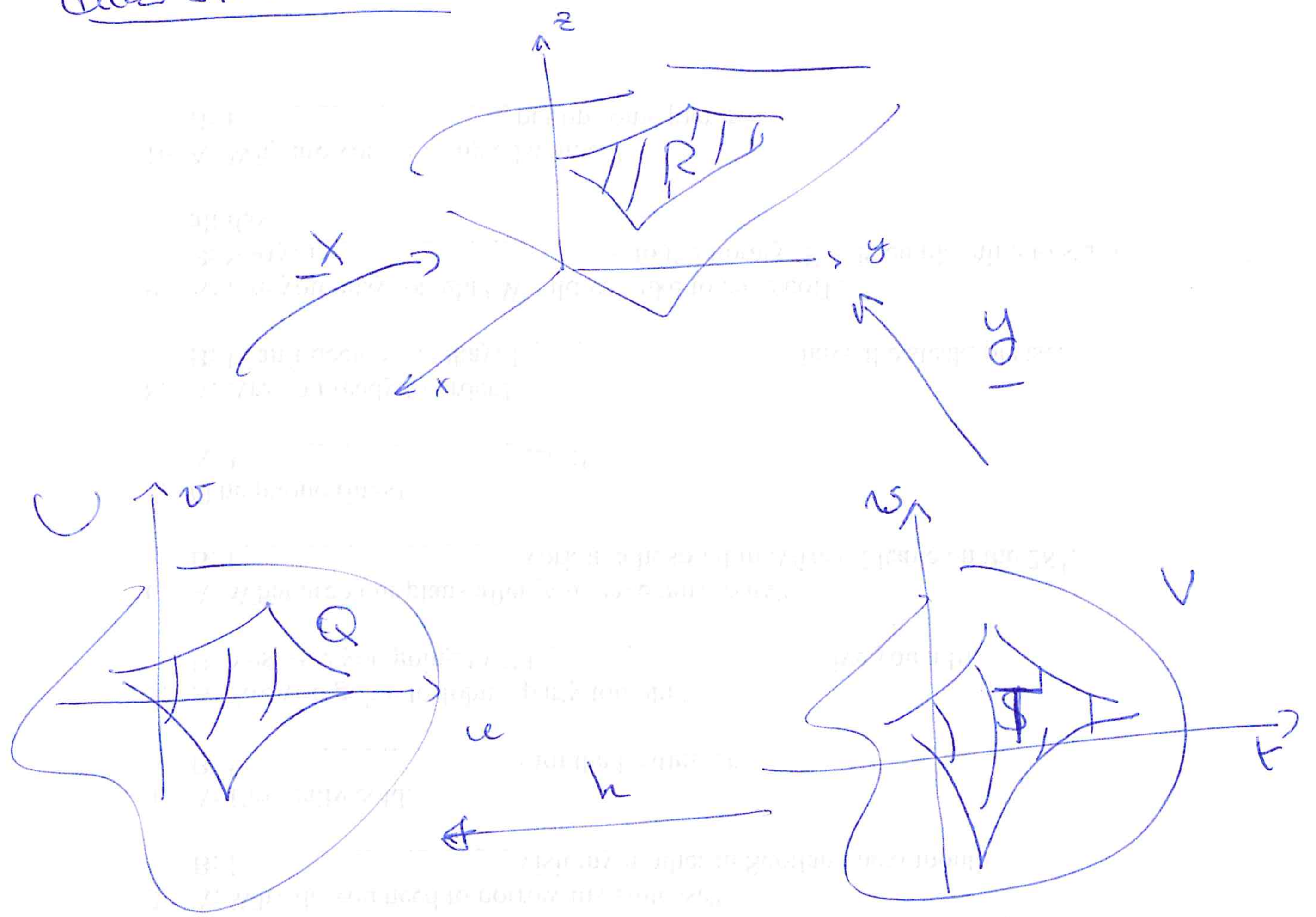
misura l'area del parallelogramma di lati $\underline{X}_u, \underline{X}_v$

Lemma L'integrale

$$\int_Q \|X_u \wedge X_v\| \, du \, dv$$

è indipendente dalla parametrizzazione

dimostrazione



dove $\underline{X}, \underline{y}$ parametrizzazioni tali che

$$R = \underline{X}(Q) = \underline{y}(T)$$

in particolare $T = \underline{y}^{-1}(R) = \underline{y}^{-1}(\underline{X}(Q))$

e $h = \underline{X}^{-1} \circ \underline{y}$ è il cambiamento di coordinate sia $J = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(t,w)}$ la matrice Jacobiana di h.

poiché $\underline{y} = \underline{x} \circ \underline{h}$ calcolando le derivate parziali si ha:

$$\underline{y}_t \wedge \underline{y}_w = (x_u \wedge x_v) \cdot \det J$$

e dunque:

$$\iint_T \| y_t \wedge y_w \| \, dt\, dw = \iint_T \| x_u \wedge x_v \| \cdot |\det J| \, dt\, dw$$

$$= \iint_Q \| x_u \wedge x_v \| \, du\, dv$$

per la formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi. ∎

<u>Definizione</u> sia $R \subseteq S$ una regione <u>limitata</u>, contenuta nell'immagine di una parametrizzazione $\underline{x} : U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $Q = \underline{x}^{-1}(R)$. Il numero:

$$\iint_Q \| x_u \wedge x_v \| \, du\, dv = A(R)$$

si dice <u>area</u> di R.

Esercizio (di calcolo vettoriale)

se $\underline{v}, \underline{w}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$, allora:

$$\boxed{\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|^2 + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 = \|\underline{v}\|^2 \cdot \|\underline{w}\|^2}$$

dunque l'integrando dell'area è:

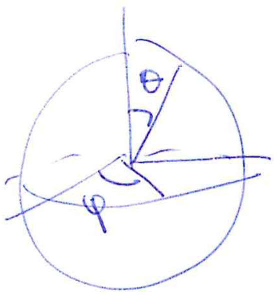
$$\|\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v\| = \sqrt{\|\underline{X}_u\|^2 \cdot \|\underline{X}_v\|^2 - \langle \underline{X}_u, \underline{X}_v \rangle^2}$$

$$= \sqrt{EG - F^2}$$

—o—

Esempio: area della sfera

$$\underline{X}(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$



$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

(dovremmo prendere le diseg. strette, in qs modo copriamo 2 volte un meridiano, ma l'area non cambia perché una curva ha misura 2-dim nulla)

$$\underline{X}_\theta = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$\underline{X}_\varphi = (-\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, 0)$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \sin^2\theta$$

dunque:

$$A(S^2) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} |\sin\theta| d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} |\sin\theta| d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta =$$

($\sin\theta$ positivo per $0 \leq \theta \leq \pi$)

$$= 2\pi \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} = 2\pi \cdot [1+1] = 4\pi$$

area del toro:

$$\underline{X}(u,v) = \begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u) \,\text{sen}\, v \\ z = r \,\text{sen}\, u \end{cases}$$

$0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$

Calcolando le derivate parziali e i prodotti scalari si ha

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r\cos u)^2$$

quindi $\sqrt{EG - F^2} = r(a + r\cos u)$

e $A(T) = 4\pi^2 r a$

Orientabilità di una superficie

Sia V uno spazio vettoriale reale, di dim. finita

Definizione Una orientazione su V è il dato di una base ordinata $\{v_1, \dots, v_n\}$. Due basi ordinate $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ danno la stessa orientazione se la matrice del cambiamento di base (cioè dell'applicazione lineare definita da $v_1 \to w_1, \dots, v_n \to w_n$) ha determinante positivo.

Quindi su uno spazio vettoriale sono possibili 2 orientazioni distinte. In dimensione bassa, queste hanno nomi ben noti:

$\dim V = 1$ orientazione = verso di percorrenza

$\dim V = 2$ orientazione = verso di rotazione (orario o antiorario)

$\dim V = 3$ orientazione = regola della mano destra (o mano sinistra)

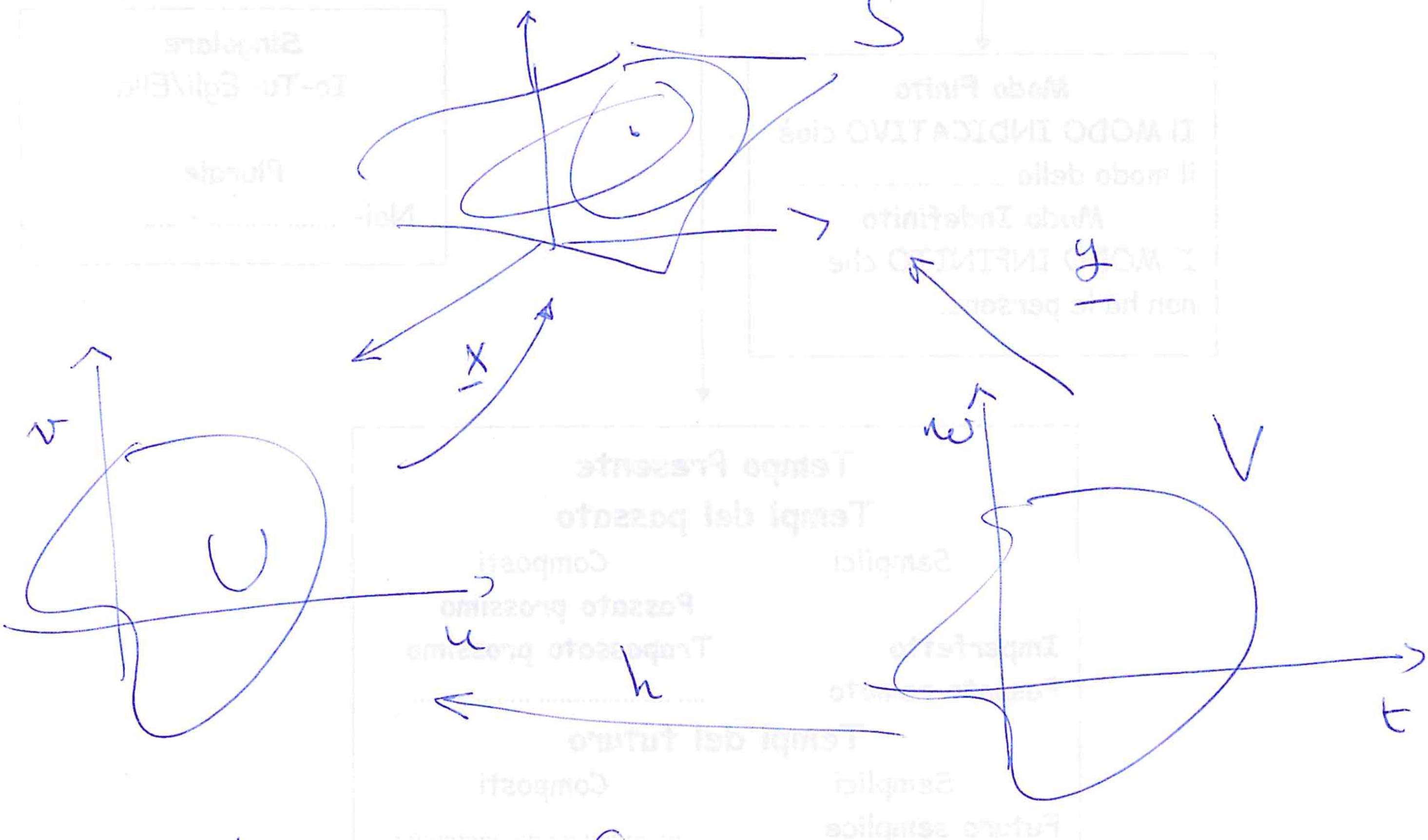
i vettori della base sono diretti come pollice, indice e medio della mano destra (o sinistra)

Sia ora $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $\underline{x} : U \longrightarrow S$ una param. (che copre parte di S) se $p \in \underline{x}(U)$, sul piano tg $T_p S$ c'è l'orientazione data dalla base ordinata $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$

N.B. ponendo $\underline{y}(u,v) = \underline{x}(v,u)$ (cioè scambiamo le variabili) si ha:

$\underline{y}_u = \underline{x}_v$, $\underline{y}_v = \underline{x}_u \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det P = -1$

e quindi l'orientazione determinata da $\underline{y}$ è l'opposta di quella data da $\underline{x}$. In generale



$h = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$. Sia

$$h(t,w) = \begin{cases} u = u(t,w) \\ v = v(t,w) \end{cases}$$

Poiché $\underline{y} = \underline{x} \circ h$ calcolando le derivate parziali si ha:

$$\underline{y}_t = (\underline{x} \circ h)_t = \underline{x}_u \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{x}_v \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\underline{y}_w = (\underline{x} \circ h)_w = \underline{x}_u \frac{\partial u}{\partial w} + \underline{x}_v \frac{\partial v}{\partial w}$$

e dunque le basi $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ e $\{\underline{y}_t, \underline{y}_w\}$ danno la stessa orientazione se e solo se il determinante Jacobiano è positivo:

$$\det \operatorname{Jac}(h) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{bmatrix} > 0$$

Definizione una superficie S è detta orientabile se esiste una famiglia $\{\underline{x}_i\}_{i \in I}$ di parametrizzazioni tale che:

(1) $\bigcup_{i \in I} \underline{x}_i(U_i) = S$ — S è coperta dalla famiglia

(2) posto $h_{ij} = \underline{x}_j^{-1} \circ \underline{x}_i$ si ha

$$\det \operatorname{Jac}(h_{ij}) > 0 \quad \text{in ogni punto}$$

e cioè le orientazioni sono compatibili.

L'orientabilità è una proprietà <u>globale</u> (10)

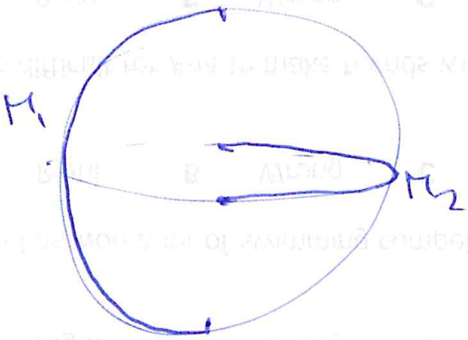
<u>Esempi</u>:

<u>1</u>. $S = \{ z = f(x,y) \} =$ grafico

S coperta da 1 sola parametrizzazione $\Rightarrow$ automaticamente orientabile

In particolare: tutte le superfici sono <u>localmente</u> orientabili.

<u>2</u>. $S =$ sfera. La parametrizzazione con coord polari usa <u>2</u> carte per coprire la sfera; l'intersezione delle due carte $= S^2 \setminus \{ M_1, M_2 \}$



è <u>connessa</u> e dunque il det Jac ha segno <u>costante</u> (perché è continuo). Se è > 0 ok, altrimenti basta scambiare le variabili di una param.

Dunque S^2 è orientabile

Orientabilità e vettori normali

Per le superfici $S \subseteq \mathbb{R}^3$ c'è una caratterizzazione utile dell'orientabilità:

Proposizione (do Carmo, prop 1, parag 2-6)

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo $N: S \to \mathbb{R}^3$ differenziabile di vettori normali, unitari.

dimostrazione:

$\boxed{\Rightarrow}$ sia S orientabile e sia $\{\underline{x}_i\}$ una famiglia di parametrizzazioni con orientamenti compatibili sulle intersezioni. Per $p \in \underline{x}(U)$ definiamo:

$$N(p) = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|}$$

Questo campo è differenziabile, unitario, normale, definito su $\underline{x}(U)$. Se ora $p \in \underline{y}(V)$ dal calcolo fatto in precedenza:

$$\underline{y}_t \wedge \underline{y}_w = (\det J) \cdot \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v$$

e poiché $\det J > 0$ si ha:

$$\frac{\underline{y}_t \wedge \underline{y}_w}{\| \underline{y}_t \wedge \underline{y}_w \|} = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\| \underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \|}$$

e cioè N è dedotto e continuo su tutta S

⟸ Sia ora $N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo normale unitario e sia $\{\underline{x}_i\}$ una famiglia di parametr. che copra S. Possiamo supporre che i domini U_i siano <u>connessi</u>, altrimenti ogni comp. connessa è una parametrizzazione.

Se $p \in \underline{x}(U)$ è possibile, eventualmente scambiando i parametri (u, v), imporre che:

$$\frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}(p) = N(p) \quad \left(\begin{array}{c}\text{il campo} \\ \text{assegnato}\end{array}\right)$$

Infatti, basta farlo in un punto p e poi per <u>continuità</u> e <u>connessione</u> del dominio di $\underline{x}$ l'uguaglianza è vera in ogni punto di U.

Se ora $p \in \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$ si ha, come prima:

$$\underbrace{\frac{(\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v)}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}}_{N(p)} = \underbrace{\frac{(\underline{y}_t \wedge \underline{y}_v)}{\|\underline{y}_t \wedge \underline{y}_v\|}}_{N(p)} \cdot \underbrace{\frac{\det Jac(h)}{|\det Jac(h)|}}_{(\pm 1)}$$

e quindi $\dfrac{\det Jac(h)}{|\det Jac(h)|} = +1$ e cioè

$\det Jac(h) > 0$ e quindi S è orientabile