La caratterizzazione dell'orientabilità mediante i campi normali consente di dimostrare:

Proposizione 2 (do Carmo, Cap. 2-6, prop 2)

Se $S = \{f(x,y,z) = a\}$ è la controimmagine di un valore regolare a, allora S è orientabile.

dimostrazione poiché a è un valore regolare, il vettore $df_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) \neq 0$ per ogni $p \in S$

Inoltre, se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ è una curva contenuta in S, si ha:

$$f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \quad \forall t \text{ e quindi}$$

$$f_x(p) \cdot x'(t) + f_y(p) \cdot y'(t) + f_z(p) \cdot z'(t) = 0$$

e cioè: il vettore df_p è perpendicolare al piano tangente e quindi è normale ad S.

Dunque: $N(p) = \dfrac{df_p}{\|df_p\|}$ è un campo normale, differenziabile, unitario definito su tutta S e cioè S è orientabile ∎

Esercizio: dimostrare che un toro con g buchi è sempre orientabile, trovando una equazione.

Studiamo ora la geometria locale di una superficie. Lo strumento principale è la mappa di Gauss, con il suo differenziale. Daremo le definizioni in termini geometrici, senza usare le parametrizzazioni locali, e vedremo varie proprietà. In un secondo momento scriveremo la mappa di Gauss in coordinate e vedremo le formule per il calcolo degli invarianti definiti in precedenza. In un qualche senso, oggi facciamo algebra lineare (funzioni lineari, forme quadratiche) e nella prossima lezione scriveremo le matrici.

Sia S una superficie orientata, cioè è stata assegnata una orientazione. Abbiamo perciò un campo $N : S \to \mathbb{R}^3$ differenziabile, normale, unitario. Questo induce una orientazione su $T_p(S)$ nel modo seguente: una base $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ di $T_p(S)$ è positiva se

$$\boxed{\langle \underline{v} \wedge \underline{w}, N(p) \rangle > 0}$$

Come sempre, se $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ è positiva, allora $\{\underline{w}, \underline{v}\}$ è negativa.

Poiché N è un campo unitario, in realtà l'immagine è contenuta nella sfera S^2.

Definizione 1 (do Carmo, Cap 3.2, def. 1)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie con un'orientazione.

La mappa $N : S \longrightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

si dice "mappa di Gauss" di S.

N è una funzione differenziabile e, se $p \in S$, il differenziale è una mappa:

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} S^2$$

Ora: $T_p(S) \perp N(p)$, perché il campo è normale

Inoltre: $T_{N(p)} S^2 \perp N(p)$, perché il piano tangente ad una sfera è $\perp$ al vettore che dà il punto sulla sfera.

Dunque: gli spazi vettoriali $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ coincidono.

Conclusione:

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$$

è un endomorfismo del piano tangente $T_p S$.

Descriviamo geometricamente dN_p:

sia $\underline{w} \in T_pS$. Esiste allora una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{w}$.

Per definizione di differenziale:

$$dN_p(\underline{w}) = \left.\frac{d(N\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0} = N'(0)$$

osserviamo che $N \circ \alpha = N(\alpha(t))$ è un campo vettoriale sulla curva $\alpha(t)$ (la restrizione alla curva del campo normale). Dunque dN_p misura la variazione di N in un intorno di p ($dN_p(\underline{w})$ = derivata direzionale di N nella direzione $\underline{w}$)

Poiché $(N\circ\alpha)(t)$ è un campo <u>unitario</u>, cioè di norma costante (uguale ad 1), la sua derivata è perpendicolare al campo stesso e cioè $N'(0) \perp N(0) = N(p)$.

Questo conferma che $N'(0) \in T_pS$, come deve essere.

Esempi:

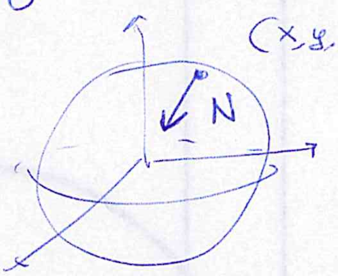
① piano S : $ax+by+cz+d=0$. In questo caso il vettore normale è sempre lo stesso ed è parallelo ad (a,b,c).

$$N(p)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c) = \text{costante}$$

dunque $dN_p = 0 \quad \forall p \in S$

② sfera di raggio r : $S=\{x^2+y^2+z^2=r^2\}$

fissiamo l'orientazione:



$$N(p) = \frac{1}{r}(-x,-y,-z)$$

cioè è il vettore che punta verso l'esterno della sfera. Se $\alpha(t) \subseteq S$ si ha:

$$N(t) = \frac{1}{r}(-x(t),-y(t),-z(t))$$

(dove $\alpha(t) = (x(t),y(t),z(t))$) e quindi:

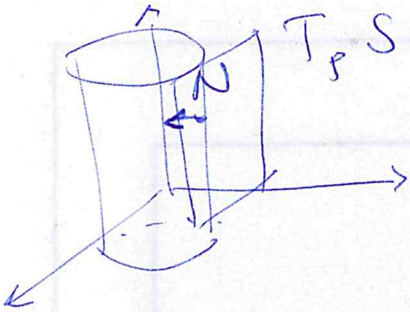
$$N'(0) = \frac{1}{r}(-x'(0),-y'(0),-z'(0)) = -\frac{1}{r}\alpha'(0)$$

cioè:

$$\boxed{dN_p(\underline{v}) = -\frac{1}{r}\underline{v}}$$

- È un multiplo dell'identità
- Dipende dal raggio

3 cilindro: $S = \{x^2+y^2=r^2\}$



come prima, un campo normale è:

$$N = \frac{1}{r}(-x, -y, 0)$$

(N punta verso l'interno, ed è orizzontale)

se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow S$ è una curva si ha

$N(t) = \frac{1}{r}(-x(t), -y(t), 0)$ e quindi

$$\boxed{N'(0) = dN_p(\alpha'(0)) = -\frac{1}{r}(x'(0), y'(0), 0)}$$

Sia ora $\underline{v} \in T_pS$. Ci sono 2 casi:

- $\underline{v}$ orizzontale (parallelo al piano xy) $\longrightarrow \boxed{dN_p(\underline{v}) = -\frac{1}{r}\underline{v}}$
- $\underline{v}$ verticale (parallelo all'asse z) $\longrightarrow \boxed{dN_p(\underline{v}) = 0}$

Ci sono dunque 2 autovettori (ortogonali fra loro) con autovalori rispettivamente

$-1/r$, 0.

In particolare dN_p è diagonalizzabile (come anche nei casi precedenti).

La diagonalizzabilità di questi casi non è speciale. Infatti dN_p ha una proprietà fondamentale:

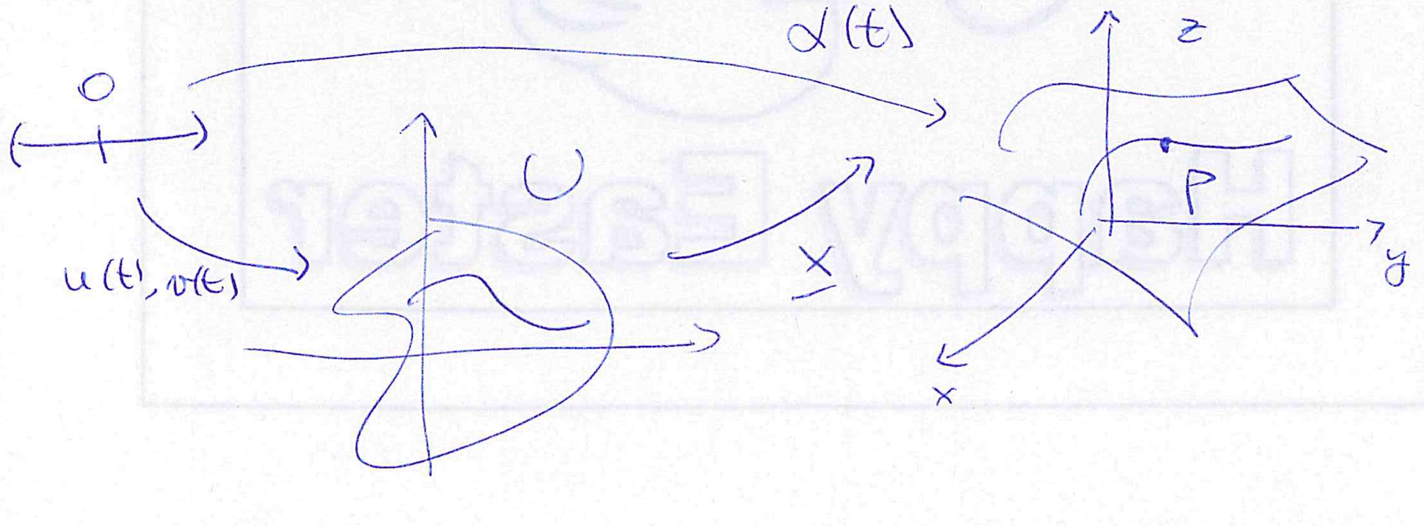
Proposizione 1 (do Carmo, cap 3.2, prop. 1)
Il differenziale della mappa di Gauss

$$dN_p : T_p S \to T_p S$$

è un endomorfismo simmetrico (o autoaggiunto) e cioè:

$\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in T_p S$ $\quad \boxed{\langle dN_p(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, dN_p(\underline{w}) \rangle}$

dimostrazione
Poiché dN_p è lineare, basta dimostrare la proprietà per $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ una base. Sia allora $\underline{x} : U \to S$ una param. intorno a p e sia $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ la base di $T_p S$ indotta da $\underline{x}$. Se $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$



è una curva su S con $\gamma(0) = p$ si ha: (8)

$$dN_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}\left(N(u(t), v(t))\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= N_u \cdot u'(0) + N_v \cdot v'(0)$$

In particolare, prendendo $u(t) = t$, $v(t) = 0$ si ha la curva coordinata $v =$ costante, che ha vettore tangente $\underline{x}_u$. Dunque:

$$dN_p(\underline{x}_u) = N_u$$ (vettore derivata parziale di N rispetto ad u)

e analogamente

$$dN_p(\underline{x}_v) = N_v$$

Basta perciò dimostrare che:

$$\boxed{\langle N_u, \underline{x}_v \rangle = \langle \underline{x}_u, N_v \rangle}$$

Poiché N è normale e $\underline{x}_u, \underline{x}_v$ son tangenti si ha:

$$\langle N, \underline{x}_u \rangle = \langle N, \underline{x}_v \rangle \equiv 0$$

quindi derivando si ottengono ancora quantità identicamente nulle.

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, \underline{X}_u \rangle = \langle N_v, \underline{X}_u \rangle + \langle N, \underline{X}_{uv} \rangle \equiv 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle N, \underline{X}_v \rangle = \langle N_u, \underline{X}_v \rangle + \langle N, \underline{X}_{vu} \rangle \equiv 0$$

Dunque:

$$\langle N_u, \underline{X}_v \rangle = - \langle N, \underline{X}_{vu} \rangle = - \langle N, \underline{X}_{uv} \rangle$$

$$= \langle N_v, \underline{X}_u \rangle = \langle \underline{X}_u, N_v \rangle$$

Poiché dN_p è simmetrico, allora è

- diagonalizzabile
- con una base di autovettori ortonormale

Analizzeremo nella prossima lezione gli autovalori e autovettori di dN_p.

Un'altra costruzione associata ad un endomorfismo simmetrico è una forma quadratica:

poniamo: per $\underline{v} \in T_p S$:

$$Q(\underline{v}) = \langle dN_p(\underline{v}), \underline{v} \rangle$$

N.B. il prodotto scalare su $T_p S$ è sempre quello dato dalla I forma fondamentale.

Definizione 2 (do Carmo, cap 3.2, def 2)

La forma quadratica

$$\boxed{II_p = -Q}$$

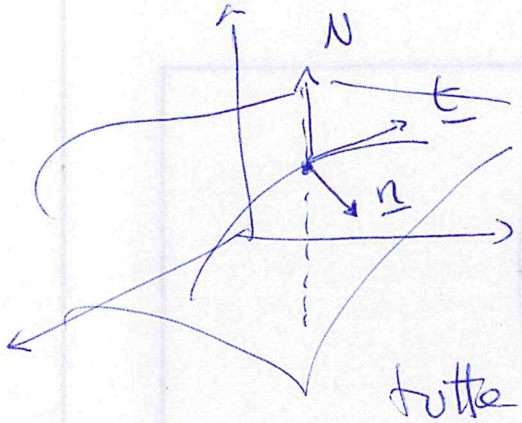
è detta seconda forma fondamentale di S in p, quindi:

$$\boxed{II_p(\underline{v}) = -\langle dN_p(\underline{v}), \underline{v} \rangle}$$

La prima forma I_p descrive la metrica su S ed è legata a concetti quali lunghezza e area. La seconda forma descrive invece la "forma" di S intorno a p e permette di definire il concetto di curvatura.

Nota bene: vedremo più avanti che due superfici sono (localmente) isometriche se e solo se le prime forme coincidono (geometria intrinseca). Invece la seconda forma dipende dall'immersione in $\mathbb{R}^3$ (come curvatura e torsione di una curva): basta considerare piano e cilindro che sono (localmente) isometrici ma hanno seconde forme diverse.

Vediamo ora l'interpretazione geometrica della seconda forma.



Per definire il concetto di curvatura di una superficie, sembra utile considerare le curvature di tutte le curve tracciate sulla superficie.

Sia dunque $C \subseteq S$ una curva passante per $p \in S$

$\underline{t}$ = vettore tg a C in p è tangente alla curva e quindi anche alla superficie e cioè: $\underline{t} \in T_p S$

Invece $\underline{n} = \frac{\underline{t}'}{\|\underline{t}'\|}$ = vettore normale a C non è necessariamente normale a S: basta pensare ad un parallelo sulla sfera: $\underline{n}$ è orizzontale, mentre N punta verso il centro

Ha senso quindi considerare la componente di $\underline{n}$ lungo N ("l'accelerazione normale"):

se θ = angolo $\underline{n}, N$ si ha

$$\cos\theta = \langle \underline{n}, N \rangle \quad (\text{poiché } \|\underline{n}\| = \|N\| = 1$$

Abbiamo anche k = curvatura di C in p

$$= \| t' \|$$

<u>Definizione</u> 3 (do Carmo, cap 3-2, def 3)

Il numero:

$$k_n = k \cdot \cos\theta = k \cdot \langle \underline{n}, N \rangle$$

viene detto "<u>curvatura normale</u>" di C in p.

Un altro modo per capire k_n è il seguente:

decomponiamo $\underline{t}' = (\alpha \underline{x}_u + \beta \underline{x}_v) + \gamma N$

in componenti <u>tangenziale</u> e <u>normale</u>

poiché $t' = k \underline{n}$ si ha:

$$\boxed{k_n = \gamma}$$

~~proprio~~ cioè l'accelerazione normale

<u>Nota</u>: k_n può essere positiva o negativa,

~~perché~~ perché l'angolo fra $\underline{n}$ e N

può essere acuto $(k_n > 0)$ o

ottuso $(k_n < 0)$.

C'è una relazione fra la curvatura normale e la seconda forma: sia $\underline{v} \in T_pS$, $\|\underline{v}\| = 1$ e sia $\alpha(s) \subseteq S$ una curva param. per arcolunghezza tale che

$\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \underline{v}$

Restringiamo il campo normale ad α e scriviamo $N(s) = N(\alpha(s))$. Si ha:

- $\alpha'(s)$ tangente ad S
- $N(s)$ normale ad S e dunque

$$\boxed{\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad \forall s}$$

derivando si ottiene quindi:

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$$

Calcoliamo ora $II_p(\underline{v})$, dalla definizione.

Notiamo che se $\underline{w}$ non ha norma 1, possiamo scrivere $\underline{w} = c \cdot \underline{v}$ con $\|\underline{v}\| = 1$ e $II_p(\underline{w}) = c^2 II_p(\underline{v})$ e quindi basta saper calcolare II_p per i vettori unitari.

Si ha:

$$\mathrm{II}_p(\underline{v}) = \mathrm{II}_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle$$

$$= -\langle N'(0), \alpha'(0)\rangle$$

$$= \langle N(0), \alpha''(0)\rangle$$

$$= \langle N(0), k\,\underline{n}\rangle = k_n(p)$$

Dunque: $\mathrm{II}_p(\underline{v})$ è uguale alla curvatura normale di una curva che passa per p ed ha vettore tangente $\underline{v}$

Cioè: la seconda forma calcola esattamente la curvatura normale.

Notiamo anche che $k_n(p)$ non dipende dalla curva, ma solo dal ~~vettore tan~~ versore tangente.

Abbiamo perciò:

Teorema di Meusnier (do Carmo, 3-2, prop 2)

Tutte le curve tracciate su S e aventi in p la stessa retta tangente hanno la stessa curvatura normale