CURVE NELLO SPAZIO

$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ curva regolare;
$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ campo vettoriale tangente

Lunghezza dell'arco di curva da $\alpha(a)$ ad $\alpha(b)$ e ascissa curvilinea:

$$\mathcal{L}_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt; \qquad s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du$$

Triedro e formule di Frenet per una curva $\beta(s)$ parametrizzata per arcolunghezza:

$$\mathbf{t}(s) = \beta'(s), \qquad \mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}, \qquad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & & k(s)\,\mathbf{n}(s) & \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s)\,\mathbf{t}(s) & & +\tau(s)\,\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & & -\tau(s)\,\mathbf{n}(s) & \end{cases}$$

Curvatura: $k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|$ Torsione: $\tau(s) = -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)$

Triedro e formule di Frenet per una curva $\alpha(t)$ con parametro qualsiasi:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s), \qquad \mathbf{b}(s) = \frac{\dot\alpha(t) \wedge \ddot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t) \wedge \ddot\alpha(t)\|}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}}(t) = & & k(t)\,\dot s(t)\,\mathbf{n}(t) & \\ \dot{\mathbf{n}}(t) = & -k(t)\,\dot s(t)\,\mathbf{t}(t) & & +\tau(t)\,\dot s(t)\,\mathbf{b}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) = & & -\tau(t)\,\dot s(t)\,\mathbf{n}(t) & \end{cases}$$

$$\boxed{k(t) = \frac{\|\dot\alpha(t) \wedge \ddot\alpha(t)\|}{\|\dot\alpha(t)\|^3}} \qquad \boxed{\tau(t) = \frac{(\dot\alpha(t) \wedge \ddot\alpha(t)) \cdot \dddot\alpha(t)}{\|\dot\alpha(t) \wedge \ddot\alpha(t)\|^2}}$$

dove scriviamo le derivate rispetto a t con un punto: $\dot\alpha(t)$, $\ddot\alpha(t)$, $\dddot\alpha(t)$ e ricordiamo che $\dot s(t) = \|\dot\alpha(t)\|$

SUPERFICI NELLO SPAZIO

S superficie regolare, $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ parametrizzazione locale

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right), \quad N(u,v) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, & F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, & G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ e &= N \cdot \mathbf{x}_{uu}, & f &= N \cdot \mathbf{x}_{uv}, & g &= N \cdot \mathbf{x}_{vv} \end{aligned}$$

Lunghezza dell'arco di curva $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ da $\alpha(a)$ ad $\alpha(b)$:

$$\mathcal{L}_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dt, \qquad u' = \frac{du}{dt},\ v' = \frac{dv}{dt}$$

Area della superficie $\mathbf{x}(D)$:

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

Operatore forma: $\boxed{-dN_p = I_p^{-1} \cdot II_p}$

Matrice dell'*operatore forma* $-dN_p$ rispetto alla base $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dove:

$$a = \frac{Ge - Ff}{EG - F^2}, \quad b = \frac{Gf - Fg}{EG - F^2}, \quad c = \frac{Ef - Fg}{EG - F^2}, \quad d = \frac{Eg - Ff}{EG - F^2}$$

Curvatura Gaussiana: $\boxed{K = \det(-dN_p) = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}}$

Curvatura media: $\boxed{H = \dfrac{1}{2}\, \mathrm{tr}(-dN_p) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}}$

Curvature principali $k_1(p)$ e $k_2(p)$: sono gli autovalori di $-dN_p$ e cioè le radici di $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$. Si ottiene quindi

$$\boxed{k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}}$$

Direzioni principali di curvatura: $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$, base ortonormale di autovettori di $-dN_p$ tale che $-dN_p(\mathbf{e}_1) = k_1\mathbf{e}_1$ e $-dN_p(\mathbf{e}_2) = k_2\mathbf{e}_2$

Curvatura normale nella direzione del versore $\mathbf{u}$: $k_n(\mathbf{u}) = -dN_p(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = II_p(\mathbf{u})$

Formula di Eulero: $\boxed{k_n(\mathbf{u}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta}$ dove $\theta = \mathbf{u}\hat{\mathbf{e}}_1$

$p \in S$ è un punto

- *ellittico* se $K(p) > 0$
- *iperbolico* se $K(p) < 0$
- *parabolico* se $K(p) = 0$ ma $-dN_p \not\equiv 0$
- *planare* se $k_1(p) = k_2(p) = 0$, cioè $-dN_p \equiv 0$
- *ombelicale* se $k_1(p) = k_2(p)$