Studiamo ora l'applicazione lineare dN_p o meglio $-dN_p$

(fare attenzione al segno!)

Poiché è un endomorfismo simmetrico, è diagonalizzabile e ha una base ortonormale di autovettori. Poniamo:

$\{e_1, e_2\}$ = autovettori di $-dN_p$

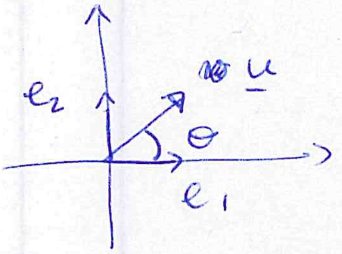
$\{k_1, k_2\}$ = autovalori corrispondenti

Quindi:

$$-dN_p(\underline{e}_1) = k_1 \underline{e}_1, \quad -dN_p(\underline{e}_2) = k_2 \underline{e}_2$$

Sia ora $\underline{u} \in T_pS$, $\|\underline{u}\| = 1$. Si può scrivere:

$$\underline{u} = \cos\theta\, \underline{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$$



calcolando $k_n(\underline{u})$ si ha:

$$k_n(\underline{u}) = II_p(\underline{u}) = \langle -dN_p(\underline{u}), \underline{u} \rangle =$$

$$= -\langle dN_p(\cos\theta\, \underline{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \underline{e}_2), \cos\theta\, \underline{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \underline{e}_2 \rangle$$

$$= \langle k_1 \cos\theta\, \underline{e}_1 + k_2 \operatorname{sen}\theta\, \underline{e}_2, \cos\theta\, \underline{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \underline{e}_2 \rangle$$

$$= k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta$$

L'uguaglianza:

$$\boxed{k_n(\underline{u}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta}$$

si dice "formula di Eulero" e non è altro che il calcolo di II_p in termini di una base ortonormale di autovettori di $-dN_p$.

Possiamo considerare la curvatura normale come una funzione $k_n : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

dove $S^1 = \{$vettori di norma 1 in $T_pS\}$ è la circonferenza unitaria di T_pS. La formula di Eulero esprime k_n con coordinata θ su S^1 e quindi si può prendere $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

k_n è continua e S^1 è compatto e quindi k_n ha massimo e minimo, che possiamo trovare derivando: si ottiene che i massimi e minimi si trovano per $\theta = 0, \pi$ e $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ e quindi (ponendo $k_1 \geq k_2$) si ha:

$$\begin{cases} k_1 = \max k_n \\ k_2 = \min k_n \end{cases}$$

e cioè: gli <u>autovalori</u> di $-dN_p$ sono il massimo e il minimo della curvatura normale.

Definizione (do Carmo, Cap 3.2, defs 4,6)

k_1, k_2 si dicono **curvature principali** (in p)

$\underline{e}_1, \underline{e}_2$ si dicono **direzioni principali di curvatura**

$K = k_1 k_2 = \det(-dN_p)$ si dice **curvatura Gaussiana** (o **totale**)

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p)$$ si dice **curvatura media**

Definizioni (do Carmo, cap 3.2, defs 8, 9)

Un punto $p \in S$ si dice:

1. Ellittico, se $K > 0$
2. Iperbolico, se $K < 0$
3. Parabolico, se $K = 0$, e $dN_p \neq 0$
4. Planare, se $dN_p \equiv 0$
5. Ombelicale, se $k_1 = k_2$

(Notiamo che planare $\Rightarrow$ ombelicale, perché planare $\iff$ $k_1 = k_2 = 0$)

Scriviamo ora la mappa di Gauss in coordinate locali, in modo da avere delle formule per calcolare le quantità definite in precedenza. Sia dunque $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, $p \in S$ e $\underline{x} : U \longrightarrow S$ una parametrizzazione tale che $p \in \underline{x}(U)$.

Come orientazione di S fissiamo

$$N = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}$$

Sia $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ una curva su S con $\alpha(0) = p$. Abbiamo già calcolato che:

- $\alpha'(0) = \underline{x}_u u'(0) + \underline{x}_v \cdot v'(0)$
- $dN_p(\alpha'(0)) = N_u u'(0) + N_v v'(0)$

(cioè $dN_p(\underline{x}_u) = N_u$, $dN_p(\underline{x}_v) = N_v$)

Poiché $N_u, N_v \in T_pS$, possiamo scrivere:

$$N_u = a_{11}\underline{x}_u + a_{21}\underline{x}_v$$

$$N_v = a_{12}\underline{x}_u + a_{22}\underline{x}_v$$

e cioè:

<u>la matrice di</u> dN_p rispetto alla base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$ di T_pS è:

$$dN_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

<u>Attenzione</u>: dN_p è un endomorfismo simmetrico, ma la matrice è simmetrica solo quando la base $\{\underline{X}_u \underline{X}_v\}$ è ortonormale, cosa che in generale non avviene.

Scriviamo II_p:

$$\mathrm{II}_p(\alpha') = -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle =$$

$$= -\langle N_u u' + N_v v', \underline{X}_u u' + \underline{X}_v v' \rangle$$

$$= e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2$$

<u>dove</u>:

$$e = -\langle N_u, \underline{X}_u \rangle = \langle N, \underline{X}_{uu} \rangle$$

$$f = -\langle N_v, \underline{X}_u \rangle = -\langle N_u, \underline{X}_v \rangle = \langle N, \underline{X}_{uv} \rangle$$

$$g = -\langle N_v, \underline{X}_v \rangle = \langle N, \underline{X}_{vv} \rangle$$

Nella base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$ si ha dunque:

$$\mathrm{II}_p(\alpha') = [u' \; v'] \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

<u>cioè</u>: $\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ è la matrice della forma quadratica II_p nella base $\{\underline{X}_u, \underline{X}_v\}$

<u>NotaBene</u>: e, f, g si calcolano a partire dalla parametrizzazione $\underline{X}$ con derivate e operazioni algebriche.

Ricaviamo ora $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$: si ha

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}\underline{X}_u + a_{21}\underline{X}_v, \underline{X}_u \rangle$$

$$= a_{11} E + a_{21} F$$

e analogamente:

$$-f = a_{11} E + a_{21} G = a_{12} E + a_{22} F$$

$$-g = a_{12} F + a_{22} G.$$

Queste relazioni si scrivono in forma matriciale:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$-\mathrm{II}_p = \left({}^t dN_p \right) \cdot \mathrm{I}_p$$

poiché la prima forma I_p è definita positiva, la sua matrice è invertibile e quindi:

$$ {}^t(dN_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} $$

$$ = -II_p \cdot I_p^{-1} $$

prendendo ora la trasposta e ricordando che I e II sono matrici simmetriche si ha che la matrice di $-dN_p$ nella base $\{X_u, X_v\}$ si esprime come:

$$ \boxed{-dN_p = I^{-1} \cdot II} $$

attenzione all'ordine.

Esercizio: se A, B sono matrici simmetriche, dimostrare che AB è simmetrica se e solo se A e B commutano.

da ⊛ si ottiene anche:

$$ \boxed{K = \det(-dN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}} $$

che è l'espressione più semplice per calcolare K.

Ricavando esplicitamente $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ (vedi formulario, o do Carmo) si ottiene anche la formula per H:

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\,\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}}$$

Osserviamo ancora che le curvature principali sono $k_1 k_2 = K$, $k_1 + k_2 = 2H$ e quindi sono le radici di:

$$\boxed{\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0}$$

(oppure si calcola $-dN_p$ e si ~~prend~~ trovano gli autovalori).

$\underline{e}_1, \underline{e}_2$ sono gli autovettori di $-dN_p$ e a questo punto sono semplici da trovare.

Esempi:

① piano $\longrightarrow$ tutto banale:

$$I = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \quad II = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

tutti i punti sono planari. (e quindi ombelicali)

② sfera $\longrightarrow$ avevamo calcolato

$$dN_p(\underline{v}) = -\frac{1}{r}\underline{v} \quad \text{e cioè}$$

$$-dN_p = \begin{bmatrix}1/r&0\\0&1/r\end{bmatrix}$$ (in qualunque base poiché è scalare)

dunque $K = \frac{1}{r^2}$ (tutti i punti sono ellittici)

$k_1 = k_2 = \frac{1}{r}$ (tutti i punti sono ombelicali)

È un teorema (cfr Carmo, cap 3-2, prop 4) che se tutti i punti di S sono ombelicali allora S è (parte di) un piano o una sfera.

3 $\underline{\text{toro}}$:

$$\underline{X}(u,v) = \begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r \sin u \end{cases}$$

derivando si ottengono $\underline{X}_u, \underline{X}_v, \underline{X}_{uu}, \underline{X}_{uv}, \underline{X}_{vv}$

In particolare:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (a + r\cos u)^2$$

quindi

$$|\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v| = \sqrt{EG - F^2} = r(a + r\cos u)$$

$$e = \frac{1}{|\underline{X}_u \wedge X_v|} \cdot \langle \underline{X}_u \wedge X_v, \underline{X}_{uu} \rangle = \frac{1}{|X_u \wedge X_v|} (\underline{X}_u, \underline{X}_v, \underline{X}_{uu})$$

$$= r \qquad \text{(prodotto misto)}$$

$$f = 0$$

$$g = \cos u \, (a + r\cos u)$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r\cos u\,(a + r\cos u)}{r^2 (a + r\cos u)^2} =$$

$$= \frac{\cos u}{r(a + r\cos u)}$$