Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 10 giugno 2019

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO ....

Esercizio 1. (7 punti) Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia dei complementari finiti, o topologia cofinita.

1. Per ognuna delle seguenti funzioni da X in se stesso, dire se è continua oppure no, motivando la risposta:
   (a) $f : X \to X$, $f(x) = x(x-1)(x-2)$
   (b) $g : X \to X$, $g(x) = \sin x$
   (c) $h : X \to X$, $h(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{per } x \geq 0 \\ -x+5 & \text{per } x < 0. \end{cases}$
2. Sia $Y = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e consideriamo $Z = X \times Y = \mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto. Determinare l'interno e la chiusura di
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}.$$
3. Trovare due funzioni $\alpha, \beta : X \to X$ continue, tali che la funzione somma $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ non sia continua.

Esercizio 2. (7 punti) Sia k un numero reale e in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea consideriamo:

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1\}, \;\; H_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = k\}, \;\; X_k = \Gamma \cup H_k.$$

1. Dividere gli X_k in classi di equivalenza omotopica al variare di k.
2. Per $k \geq 1$, calcolare i possibili $\pi_1(X_k, x_0)$ al variare di k e di x_0.

Esercizio 3. (5 punti) Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo le sequenze

$$W_1 = a\,d\,b\,c^{-1}\,e^{-1}\,d^{-1}\,b\,c^{-1}\,a^{-1}\,e$$

e

$$W_2 = c\, b^{-1}\, c^{-1}\, a^{-1}\, d\, b\, d\, a.$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Determinare per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ le seguenti matrici sono simili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ h & 1 & 0 \\ h-2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. (6 punti) Consideriamo i seguenti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$p_1 = (1 : \sqrt{3} : 0), \quad p_2 = (-\frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \sqrt{2}), \quad p_3 = (0 : -7 : 1),$$
$$q_1 = (2 : \frac{1}{3} : 0), \quad q_2 = (6 : -1 : 1), \quad q_3 = (0 : 1 : a)$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

1. Dire per quali valori di a esiste una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3$;

2. per tali valori di a, dire se F è unica.

.