Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 9 settembre 2019

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (7 punti) Sia X la retta reale dotata della topologia

$$\tau = \{X, \emptyset, (-a, a) \mid a \in \mathbb{R}, a > 0\}.$$

(a) Dimostrare che per ogni $U \in \tau$, $U \neq \emptyset$, la chiusura di U è X.

(b) Dimostrare che non esiste alcuna metrica che induca la topologia τ.

(c) Dimostrare che ogni sottoinsieme non vuoto di X è connesso.

(d) Sia Y la retta reale dotata della topologia euclidea, e si consideri $Z = X \times Y$ con la topologia prodotto. Determinare la chiusura in Z della diagonale $D = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. (6 punti) Sia Y uno spazio topologico arbitrario e S^1 la circonferenza standard con la topologia euclidea e consideriamo lo spazio prodotto $S^1 \times Y$.

(a) Esiste uno spazio topologico Y tale che $S^1 \times Y$ sia omeomorfo alla sfera S^2?

(b) Esiste uno spazio topologico Y tale che $S^1 \times Y$ sia omeomorfo al piano $\mathbb{R}^2$?

(c) Esiste uno spazio topologico Y tale che $S^1 \times Y$ sia omeomorfo al piano bucato $\mathbb{R}^2 - \{0\}$?

Esercizio 3. (6 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = a\,b\,b\,a\,c\,d\,e\,e\,d\,c$$

1. Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

2. Scrivere la sequenza di lati di un poligono V tale che la superficie T che si ottiene da V sia orientabile ed abbia caratteristica di Eulero

$$\chi(T) = 2\chi(S)$$

Esercizio 4. (7 punti) Consideriamo le due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le matrici A e B sono simultaneamente diagonalizzabili, e il polinomio caratteristico di A è $c_A(t) = (t-1)^2(t+1)^2$. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ composta da autovettori comuni di A e B.

Esercizio 5. (6 punti)

(1) Siano A, B, C, D quattro punti in posizione generale nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Mostrare che esiste una proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(A) = B$, $f(C) = D$ e $f^2 = \mathrm{Id}$.

(2) Viceversa, siano P, Q, R, S quattro punti distinti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ per cui esiste una proiettività $g\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $g(P) = Q$, $g(R) = S$ e $g^2 = \mathrm{Id}$. Mostrare che o P, Q, R, S sono tutti allineati, oppure sono in posizione generale.