

**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**  
**Foglio di esercizi n. 0 – a.a. 2019-20**

Gli esercizi di questo foglio verranno discussi nel tutorato di mercoledì 2 ottobre e non sono da consegnare.

**Esercizio 1.** Sia  $I$  un insieme arbitrario, sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Siano inoltre  $A, A_i \subseteq X$  e  $B, B_i \subseteq Y$ . Dimostrare le seguenti formule:

1.  $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
2.  $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
3.  $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$
4.  $f(f^{-1}(A)) \subseteq A, \quad B \subseteq f^{-1}(f(B))$

**Esercizio 2.** Siano  $X, Y$  due insiemi,  $A \subseteq X$  e  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. È vero che

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)?$$

**Esercizio 3.** Siano  $X, Y$  due insiemi e  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Dimostrare che:

1.  $f$  è iniettiva  $\iff f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  per ogni  $A, B \subseteq X$   $\iff f^{-1}(f(C)) = C$  per ogni  $C \subseteq X$
2.  $f$  è suriettiva  $\iff f(f^{-1}(D)) = D$  per ogni  $D \subseteq Y$

**Esercizio 4.** Quale delle seguenti funzioni è una metrica su  $\mathbb{R}$ ?

1.  $d(x, y) = |x^2 - y^2|$
2.  $d(x, y) = |x^3 - y^3|$
3.  $d(x, y) = e^{x-y}$
4.  $d(x, y) = |x - 3y|$

**Esercizio 5.** Consideriamo  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea (quella dell'Analisi).

1. Trovare la chiusura di  $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (0, 1]$  e  $\{1\} \cup (2, 3]$
2. Trovare l'interno di  $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e  $(0, 1]$
3. È vero che

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ = \left(\bigcup_{i \in I} A_i^\circ\right)$$

oppure

$$\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)} = \left(\bigcup_{i \in I} \overline{A_i}\right)?$$