Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 1 - 1 ottobre 2019

Esercizio 1. *(Definizione di topologia)* Sia X un insieme e $a \in X$ un elemento fissato. Consideriamo la famiglia:

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ oppure } a \in A\}$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia per X.
2. Dimostrare che la topologia indotta sul sottospazio $B = X \setminus \{a\}$ è la topologia discreta.
3. Dimostrare che $C = \{a\}$ è denso, cioè $\overline{C} = X$.

Esercizio 2. *(Definizione di topologia)* Sia X un insieme e $a \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid a \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ è finito}\}$$

è una topologia su X.

Esercizio 3. *(Basi, topologia, chiusura)* Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e per ogni intero positivo o nullo a poniamo

$$B_a = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e cioè B_a è l'insieme dei multipli (interi) di a. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{B_a \mid a \geq 0, a \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia su $\mathbb{Z}$. Indicheremo questa topologia con $\mathcal{T}$.
2. Dimostrare che se A è un aperto, non vuoto e finito allora $A = B_0 = \{0\}$.
3. Dimostrare che $C = \{-1, 1\}$ è chiuso.
4. Determinare la chiusura di $D = \{2\}$.

Esercizio 4. *(Def di topologia, chiusura, interno)* Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.

3. Dimostrare che la chiusura di $A = [1, 3/2]$ è $[1, 2)$ e che l'interno di A è l'insieme vuoto.

Esercizio 5. *(Basi topologia, intorni)* Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi si considerino gli insiemi

$$A(n) = \begin{cases} \{n\} & n \text{ dispari} \\ \{n-1, n, n+1\} & n \text{ pari} \end{cases}$$

e sia $\mathcal{B} = \{A(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti gli insiemi $A(n)$.

1. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è la base per una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.

2. Determinare la famiglia di tutti gli intorni del punto 2 e del punto 3.

Esercizio 6. *(Intorni)* Mostrare che, nella topologia euclidea su $\mathbb{R}$, gli intervalli chiusi $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ formano, al variare di $n \in \mathbb{N}$, un sistema fondamentale di intorni di 0.

Esercizio 7. *(Funzioni continue, relazione di finezza)* Siano date due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su un insieme X. Provare che l'applicazione identica $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, $x \mapsto x$ è continua se e solo se $\mathcal{T}_1$ è più fine di $\mathcal{T}_2$.

Esercizio 8. *(Funzioni aperte, basi topologia)* Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Dimostrare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 9. *(Funzioni continue/aperte e densità)* Sia $f : X \to Y$ una funzione continua.

1. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f(A)$ è denso in $f(X)$ (con la topologia di sottospazio).

2. Sia f aperta, sia $D \subseteq Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(D)$ è denso in X. La continuità di f è necessaria?