

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 2 – a.a. 2019-20

Da consegnare: mercoledì 16 ottobre 2019

Esercizio 1. Siano X, Y spazi topologici, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

In particolare, il prodotto di due chiusi è chiuso nel prodotto.

Suggerimento: Per prima cosa dimostrare che:

Lemma. Siano X, Y spazi topologici, $x \in X$, $y \in Y$ e siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di x e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un sistema fondamentale di intorni di y . Poniamo $W_{ij} = U_i \times V_j \subseteq X \times Y$. Allora:

$$\mathcal{W} = \{W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$$

è un sistema fondamentale di intorni di $(x, y) \in X \times Y$.

Esercizio 2. Dimostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} \overline{U}$$

Confrontare questa proprietà con la proprietà analoga per gli spazi **T1** (Esercizio 4 del primo foglio di tutorato)

Esercizio 3. (Esercizio 1 dello scritto del 14 settembre 2016). Sia X un insieme con la topologia dei complementari finiti (un sottoinsieme è aperto se e solo se è l'insieme vuoto oppure il suo complementare è finito). Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se X è finito. In questo caso, qual è la topologia su X ?

Esercizio 4. Considerare le topologie degli esercizi 1–5 del foglio ESERCITAZIONI 1 (vedi Moodle, prima settimana) e per ognuna di esse dire se è di Hausdorff o no.

Suggerimento: A volte le proprietà della topologia illustrate nel testo dell'esercizio suggeriscono subito la risposta.

Esercizio 5. Proprietà degli spazi **T1**:

1. dimostrare che un sottospazio di uno spazio **T1** è **T1**;
2. dimostrare che il prodotto di spazi **T1** è **T1** (suggerimento: usare la proprietà $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ dell'Esercizio 1);
3. essere **T1** è una proprietà topologica;
4. due spazi topologici X e Y sono **T1** se e solo se il prodotto $X \times Y$ è **T1**