Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 2 - 8 ottobre 2019

Esercizio 1. *(Topologia prodotto)* Sia A chiuso in X e B chiuso in Y. Allora $A \times B$ è chiuso in $X \times Y$ (cioè il prodotto di chiusi è chiuso).
Nota bene: vale laa proprietà più forte (secondo foglio di tutorato):

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

Esercizio 2. *(Chiusura nei sottospazi)* Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un sottospazio e sia $A \subseteq Y$. Indichiamo con $\mathrm{cl}_X(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di X e con $\mathrm{cl}_Y(A)$ la chiusura di A come sottoinsieme di Y (nella topologia indotta di sottospazio).

1. Dimostrare che $\mathrm{cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(A)$.
2. Dare un esempio per mostrare che in generale $\mathrm{cl}_Y(A) \neq \mathrm{cl}_X(A)$.
3. Determinare condizioni *necessarie* e/o *sufficienti* su Y in modo che per ogni $A \subseteq Y$ si abbia $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A)$.

Esercizio 3. *(Topologia indotta da distanza, topologia prodotto)* Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sull'insieme prodotto $X \times Y$ definiamo

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

1. Dimostrare che d è una distanza su $X \times Y$.
2. Dimostrare che la topologia indotta dalla distanza d su $X \times Y$ è la topologia prodotto (cioè il prodotto delle topologie indotte dalle distanze d_X su X e d_Y su Y).

Esercizio 4. *(Funzioni continue)* Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia cofinita.

1. Per ognuna delle seguenti funzioni dire se è continua:
   (a) $f : X \to X,\ f(x) = x(x-1)(x-2)$;
   (b) $g : X \to X,\ g(x) = \sin x$;
   (c) $h : X \to X,\ h(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 0, \\ -x+5 & \text{se } x < 0. \end{cases}$
2. Sia $Y = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea e sia $Z = X \times Y = \mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto. Determinare interno e chiusura di

$$A = \{(x, y) \in Z \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Esercizio 5. *(Omeomorfismi)* Trovare uno spazio topologico non vuoto X tale che X sia omeomorfo a $X \times X$.

Esercizio 6. *(Spazi T1)* Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme denso e Y uno spazio topologico T_1. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua che è costante su A. Dimostrare che f è costante su tutto X.