Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 3 - 15 ottobre 2019

Esercizio 1. Dimostrare che ogni omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse. Cioè: se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo e $C \subseteq X$ è una componente connessa di X, allora $f(C)$ è una componente connessa di Y. Concludere che due spazi omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico e Y uno spazio con almeno due punti distinti con la topologia discreta. Dimostrare che X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f : X \to Y$ è costante.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X non è connesso se e solo se esiste una funzione $f : X \to \{0, 1\}$ continua e suriettiva. Lo spazio $\{0, 1\}$ ha la topologia discreta.

Esercizio 4. Uno spazio topologico X si dice *totalmente sconnesso* se gli unici sottospazi connessi sono i punti. Dimostrare che se X ha la topologia discreta, allora X è totalmente sconnesso. Trovare un esempio di spazio totalmente sconnesso che non ha la topologia discreta.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, si considerino i sottospazi:

$$A = \{(x, n) \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \quad \text{e} \quad B = \left\{(x, y) \mid y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}.$$

Si consideri inoltre l'applicazione continua $g : A \to B$ definita da

$$g(x, n) = \left(x, \frac{x}{n}\right).$$

1. A è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
2. B è connesso per archi? è chiuso in $\mathbb{R}^2$?
3. Sia $C = \{(x, 1) \in A \mid -1 \leq x \leq 1\}$; C è chiuso in A? $g(C)$ è chiuso in B?

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottospazi compatti.

1. Dimostrare che $A \cup B$ è compatto.
2. Se X è di Hausdorff, dimostrare che $A \cap B$ è compatto.
3. Trovare un esempio in cui $A \cap B$ non è compatto

Esercizio 7. Sia $X = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali con la topologia euclidea e sia

$$Y = \{A \in X \mid A^2 = I\}$$

dove I è la matrice identità.

1. dimostrare che Y è chiuso
2. dimostrare che Y non è compatto
3. Y è connesso? (suggerimento: osservare che $Y \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$).