**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**
**Foglio di esercizi n. 4 – a.a. 2019-20**

Da consegnare: mercoledì 30 ottobre

**Esercizio 1.** Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

1. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff.

Nota: questo spazio non è la contrazione di $\mathbb{Q}$ ad un punto, ma il quoziente di $\mathbb{R}$ per l'azione di $\mathbb{Q}$ data da $q.x = q + x$, per $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2.** *(Esercizio 5.11. del Manetti)* Sia $X$ uno spazio topologico di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottoinsieme compatto e $X/K$ la contrazione di $K$ ad un punto. Dimostrare che $X/K$ è di Hausdorff.

**Esercizio 3.** Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $A = (-1, 1)$, $B = [-1, 1]$ e siano $X_A = X/A$ e $X_B = X/B$ le contrazioni ad un punto di $A$ e $B$ rispettivamente con le topologie quoziente.

1. dimostrare che $X_A$ non è di Hausdorff (non è nemmeno **T1**)
2. $X_B$ è di Hausdorff per l'esercizio precedente. Dimostrare che $X_B$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$.

**Esercizio 4.** *(Esercizio 5.18. del Manetti)* Pensando $\mathbb{RP}^1$ come il quoziente $(\mathbb{R}^2 - \{0\})/\mathbb{R}^*$, indichiamo con $[x_0, x_1] \in \mathbb{RP}^1$ la classe di equivalenza del vettore non nullo $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Quindi $[x_0, x_1]$ significa un vettore non nullo determinato a meno di proporzionalità.

Dimostrare che la funzione $\varphi : \mathbb{RP}^1 \to S^1$ data da

$$[x_0, x_1] \mapsto \left( \frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

**Esercizio 5.** Siano $X$ e $Y$ due spazi topologici. Il *join* $X * Y$ è lo spazio topologico quoziente

$$X * Y = (X \times Y \times [0, 1])/\sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da:

$$(x, y, t) \sim (x', y', t') \iff \begin{cases} x = x' \text{ e } t = t' = 0 \\ \text{oppure} \\ y = y' \text{ e } t = t' = 1 \end{cases}$$

Sia $S^0 = \{-1, 1\}$ la sfera di dimensione 0 e $S^1$ la circonferenza. Gli spazi $S^0 * S^0$ e $S^1 * S^0$ sono omeomorfi a spazi topologici ben noti. Quali spazi sono? (basta la risposta, con una spiegazione convincente anche se non completamente rigorosa. Un disegno può aiutare.).

In generale, come si può descrivere il join $X * S^0$?