Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 5 - 29 ottobre 2019

Esercizio 1. Sia $n \geq 1$ e $N = (1, 0, \ldots, 0)$ il polo nord della sfera $S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$. La *proiezione stereografica*

$$f : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

è definita identificando $\mathbb{R}^n$ con l'iperpiano $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di equazione $x_0 = 0$ e ponendo $f(x)$ come l'intersezione di H con la retta passante per i punti x e N. Trovare l'espressione per f in coordinate (almeno per $n = 2$) e dimostrare che è un omeomorfismo.

Esercizio 2. Provare che il quoziente $\mathbb{R}^2 / \operatorname{GL}(2, \mathbb{R})$ non è Hausdorff.

Esercizio 3. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva. Provare che se X è separabile allora Y è separabile. Se f è anche aperta, provare che, se X ha una base numerabile, anche Y ha una base numerabile.

Esercizio 4. Si consideri la successione $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. In quali tra le topologie banale, cofinita, discreta, euclidea tale successione converge a 0?

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico con la topologia cofinita.

1. Sia $\{x_n\}_n$ una successione in X tale che per ogni $\overline{x} \in X$, esistono infiniti indici $m \in \mathbb{N}$ tali che $x_m \neq \overline{x}$. Dimostrare che ogni $x \in X$ è punto di accumulazione per tale successione.

2. Sia $\{x_n\}_n$ una successione in X tale che per ogni $\overline{x} \in X$, esistono un numero finito di indici $m \in \mathbb{N}$ tali che $x_m = \overline{x}$. Dimostrare che tale successione converge a ogni $x \in X$.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e propria. Dimostrare che f è chiusa.

Esercizio 7. Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $x \in X$ un punto. Si dice che x è un *punto di accumulazione per A* se ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x.

Dimostrare che $x \in X$ è un punto di accumulazione per una successione $\{a_n\}$ se e solo se il punto $(x, 0) \in X \times [0, 1]$ è un punto di accumulazione per il sottoinsieme $A = \{(a_n, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \times [0, 1]$.