**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**
**Foglio di esercizi n. 5 – a.a. 2018-19**

Da consegnare: mercoledì 6 novembre

**Esercizio 1.** (Manetti, Esercizio 6.7) Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una funzione biunivoca (qualunque!) fra i numeri naturali e i numeri razionali, cioè:

1. $a_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a$ è iniettiva e l'immagine $a(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$.

Pensando alla funzione $a$ come ad una successione a valori reali, determinare i punti di accumulazione.

Suggerimento (di Manetti): ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali.

**Esercizio 2.** (esercizio 1 dallo scritto di luglio 2018) Consideriamo l'insieme $X = [0, 2) \subset \mathbb{R}$ e la famiglia di sottoinsiemi di $X$:

$$\mathcal{T} = \{[0, a) \mid 0 \leq a \leq 2\}.$$

N.B. per $a = 0$, $[0, 0) = \emptyset$.

($a$) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su $X$.

($b$) Dare un esempio di intersezione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{T}$ che non appartenga a $\mathcal{T}$.

($c$) Dimostrare che la chiusura di $A = [1, 3/2]$ è $[1, 2)$ e che l'interno di $A$ è l'insieme vuoto.

($d$) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff.

($e$) Dire se $(X, \mathcal{T})$ è separabile.

**Esercizio 3.** Sia $X$ uno spazio topologico, $B \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $p \in X$ un punto. Si dice che $p$ è un *punto di accumulazione per* $B$ se ogni intorno di $p$ contiene punti di $B$ diversi da $p$. (Questa è esattamente la definizione data nel corso di Analisi UNO).

Sia ora $a : \mathbb{N} \to X$ una successione e poniamo $A = a(\mathbb{N}) \subseteq X$, l'immagine della successione. Sia $p \in X$ e consideriamo le due affermazioni:

1. $p$ è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\} \implies p$ è un punto di accumulazione per l'insieme $A$
2. $p$ è un punto di accumulazione per l'insieme $A \implies p$ è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\}$

Determinare se le due affermazioni sono vere o false, fornendo una dimostrazione oppure un controesempio.

È possibile rendere vera una affermazione falsa aggiungendo ipotesi sullo spazio $X$? (per esempio, si potrebbe aggiungere $X$ soddisfa il primo assioma o il secondo assioma di numerabilità, oppure $X$ è compatto oppure $X$ è uno spazio metrico ...)