

Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 6 – a.a. 2019-20

Da consegnare: mercoledì 13 novembre

Esercizio 1. (Manetti, Esercizio 10.6) Dimostrare, come affermato nella Definizione 10.17, che per uno spazio topologico non vuoto X le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. X ha il tipo di omotopia di un punto.
2. Per ogni $p \in X$ l'applicazione costante $f : X \rightarrow X$ data da $f(x) = p$, è omotopa all'identità.
3. Esiste $p \in X$ tale che l'applicazione costante $f : X \rightarrow X$ data da $f(x) = p$, è omotopa all'identità.

Esercizio 2. (Manetti, Esercizio 10.12.) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \rightarrow S^n$ due applicazioni continue. Utilizzando l'espressione algebrica

$$\frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}, \quad t \in [0, 1]$$

mostrare che se $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$, allora f è omotopa a g .

Esercizio 3. Dimostrare che essere omotopicamente equivalenti è una relazione di equivalenza sulla collezione di tutti gli spazi topologici.

Esercizio 4. Siano X, Y, Z, W spazi topologici. Dimostrare che se X è omotopicamente equivalente a Y , e Z è omotopicamente equivalente a W , allora $X \times Z$ è omotopicamente equivalente a $Y \times W$.