Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 7 - 12 novembre 2018

Esercizio 1. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ definito dall'equaizone

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \cdot ((x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

con la topologia di sottospazio. Descrivere lo spazio X e dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 2. Sia $e : \mathbb{R} \to S^1$ la mappa esponenziale

$$e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

e si consideri il cammino $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ definito da

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{4} + 3t.$$

(a) Si verifichi che $\tilde{\alpha}$ induce un cappio α in S^1 con punto base $p = (0, 1)$.

(b) Si determini il sottogruppo di $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe di α.

Esercizio 3. Sia $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario chiuso e $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ il suo bordo.

(a) Sia $z \in D^2$. Dimostrare che $D^2 - \{z\}$ è semplicemente connesso se e solo se $z \in S^1$.

(b) Utilizzando il punto precedente dimostrare che se $f : D^2 \to D^2$ è un omeomorfismo, allora $f(S^1) = S^1$.

Esercizio 4. Siano

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-1 = 0\} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\}$$

e poniamo $X = A \cup B \in \mathbb{R}^3$ con la topologia di sottospazio. Calcolare il gruppo fondamentale di X.

Esercizio 5. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la top. euclidea)

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 1\big\} \quad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 1\big\}$$

e poniamo $X = A \cup B$.

(a) Sia $P = (1, 0) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.

(b) Dimostrare che A non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 6. (a) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *iniettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia iniettivo.

(b) Dare un esempio di due spazi topologici X, Y e una funzione continua *suriettiva* $f : X \to Y$ per cui l'omomorfismo indotto fra i gruppi fondamentali $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *non* sia suriettivo.

(c) Sia ora $f : X \to Y$ continua e *biiettiva.* L'omomorfismo indotto $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è sempre biiettivo?

Esercizio 7. Consideriamo le funzioni $g, h : S^1 \to S^1$ date da $g(z) = z^n$ e $h(z) = 1/z^n$. Calcolare gli omomorfismi indotti $g_*, h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$. (Suggerimento: ricordare la formula $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.)