Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2
Foglio di esercizi n. 7 – a.a. 2019-20

Da consegnare: mercoledì 20 novembre

Esercizio 1. (Manetti, Esercizio 11.11.) Provare che ogni applicazione continua omotopa ad un'applicazione costante induce l'omomorfismo nullo tra i rispettivi gruppi fondamentali.

Esercizio 2. (Manetti, Es. 11.1.) Provare che i due cammini $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t)), \qquad \beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t))$$

sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 3. (Manetti, Es. 11.17.) Calcolare il gruppo fondamentale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ unione della sfera S^2 e dei tre piani coordinati (sul libro di Manetti c'è un suggerimento).

Esercizio 4. (Manetti, Es. 12.33.) Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Esercizio 5. Esiste uno spazio topologico Y tale che $S^1 \times Y$ è omeomorfo alla sfera S^2? Esiste Y tale che $S^1 \times Y$ è omeomorfo al piano $\mathbb{R}^2$? Esiste Y tale che $S^1 \times Y$ è omotopicamente equivalente al piano $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottospazio di X. Diciamo che Y è un *retratto di deformazione forte* di X se esiste un'applicazione continua $R\colon X \times I \to X$ con le proprietà:

1. $R(x, 0) \in Y$ e $R(x, 1) = x$ per ogni $x \in X$;
2. $R(y, t) = y$ per ogni $y \in Y$ e $t \in I$.

(In particolare, Y è un retratto di deformazione di X.)

Consideriamo ora i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, y = 0\}$$
$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/n, 0 \le y \le 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \le y \le 1\}$$

e sia

$$X = A \bigcup C \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

(X è detto il "pettine"). Dimostrare che:

1. X è contraibile

2. il punto $P = (0,0)$ è un retratto di deformazione forte di X
3. *(facoltativo)* il punto $Q = (0,1)$ è un retratto di deformazione di X, ma NON è un retratto di deformazione forte di X.

Esercizio 7. *(Facoltativo, di approfondimento.)*(Manetti, Es. 10.24.) Siano X e Y due spazi topologici. Mostrare che X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se X e Y sono isomorfi nella categoria KTOP avente per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le classi di omotopia di mappe continue.