Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 8 - 19 novembre 2018

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (con la topologia euclidea)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\}$$

e poniamo

$$X = A \cup B$$

1. Sia $P = (0, 1) \in X$. Calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$.
2. Dimostrare che B non è un retratto di deformazione di X.

Esercizio 2. Siano $P = (0, 0, 1)$, $Q = (0, 0, -1)$ e $R = (1, 0, 0)$ tre punti della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sia $X = S^2 \setminus \{P, Q, R\}$ con la topologia euclidea.

1. Determinare un sottospazio Y di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a X.
2. Scelto un punto $x_0 \in X$, determinare $\pi(X, x_0)$ e dei cammini le cui classi generino $\pi(X, x_0)$.

Esercizio 3. Sia $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco chiuso di centro l'origine e raggio 1 e sia S^1 il suo bordo. Sia inoltre $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ dotato della topologia discreta. (F_n è un insieme formato da n punti con la topologia discreta). Poniamo, per $n \geq 2$

$$X_n = (D^2 \times F_n)/\sim$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da

$$(x, a) \sim (y, b) \iff x = y \in S^1$$

1. Dimostrare che X_2 è omeomorfo alla sfera S^2 (e quindi X_2 è connesso e semplicemente connesso).
2. Dimostrare (per induzione su n) che X_n è connesso per ogni $n \geq 2$.
3. Dimostrare (per induzione su n) che X_n è semplicemente connesso per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 4. Determinare il tipo di omeomorfismo della superficie S corrispondente alla sequenza:

$$W = aceb^{-1}d^{-1}a^{-1}c^{-1}e^{-1}bd$$

e calcolarne la caratteristica di Eulero.

Esercizio 5. Determinare il tipo di omeomorfismo della superficie S data dalla somma connessa $S_1 \sharp S_2$, dove S_i è la superficie corrispondente alla sequenza W_i:

$$W_1 = adb^{-1}c^{-1}e^{-1}d^{-1}bca^{-1}e \qquad W_2 = cb^{-1}c^{-1}a^{-1}dbd^{-1}a$$

e calcolare la caratteristica di Eulero $\chi(S)$.