**Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2**
**Foglio di esercizi n. 8 – a.a. 2019-20**

Da consegnare: mercoledì 27 novembre

**Esercizio 1.** Per ognuna delle seguenti sequenze, determinare il tipo di omeomorfismo della superficie corrispondente. Per la seconda e l'ultima sequenza, applicare esplicitamente l'algoritmo del taglia & incolla per classificare la superficie.

1. $a\,b\,c\,a\,c\,b$
2. $a\,b\,c\,b^{-1}\,d\,e\,c^{-1}\,a\,e\,d$
3. $a\,b\,c\,c^{-1}\,d\,e\,f\,f^{-1}\,e^{-1}\,d^{-1}\,b^{-1}\,a^{-1}$
4. $a\,e\,d^{-1}\,e^{-1}\,b\,c\,a\,d\,c\,b$
5. $a\,b\,c\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}$
6. $a\,b\,c\,d\,a^{-1}\,b^{-1}\,c^{-1}\,d^{-1}$

**Esercizio 2.** Il libro XIII degli *Elementi* di Euclide (l'ultimo libro dell'opera) è dedicato alla costruzione dei 5 solidi platonici: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro e alla dimostrazione del fatto che sono gli unici poliedri *regolari* (cioè tutte le facce sono poligoni regolari uguali fra loro, da ogni vertice parte lo stesso numero di spigoli e gli angoli solidi sono tutti uguali fra loro).

Dimostrare, usando il fatto che un poliedro regolare è una suddivisione della sfera e la caratteristica di Eulero, che queste sono le uniche 5 possibilità.

Notare che questa dimostrazione non dà l'*esistenza*. Costruire il tetraedro, il cubo e l'ottaedro è semplice, ma costruire il dodecaedro e l'icosaedro è meno immediato (ma non è richiesto per quest'esercizio).

**Esercizio 3.** Per ogni *triangolazione* (cioè tutte le facce sono *triangoli*) di una superficie compatta connessa $X$ con $f$ facce, $s$ spigoli e $v$ vertici, dimostrare che

$$\begin{aligned} 3f &= 2s \\ s &= 3(v-\chi) \\ v &\geq \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \end{aligned}$$

dove $\chi$ è la caratteristica di Eulero di $X$: $\chi = f - s + v$. Suggerimento per l'ultima diseguaglianza: osservare che il numero $s$ di spigoli è minore o uguale al numero delle coppie di vertici.

**Esercizio 4.** Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{C}$ come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1, e l'applicazione $f\colon S^1 \to S^1$ data da $f(z) = z^2$. Mostrare che $f$ è un'identificazione, e dedurre che $S^1$ è omeomorfa a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

**Esercizio 5.** Sia $X$ una varietà topologica di dimensione $n$, ovvero uno spazio topologico di Hausdorff, connesso, a base numerabile, e localmente euclideo di dimensione $n$.

Mostrare che $X$ è connesso per archi.

**Esercizio 6.** Siano $X$ una varietà topologica di dimensione $n$ e $Y$ una varietà topologica di dimensione $m$. Mostrare che $X \times Y$ è una varietà topologica di dimensione $n + m$.

**Esercizio 7.** Sia $X$ uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile, e localmente euclideo di dimensione $n$. Mostrare che ogni componente connessa di $X$ è aperta in $X$ ed è una varietà topologica di dimensione $n$.