Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 8 - 26 novembre 2018

Esercizio 1. Siano S_1 e S_2 le superfici compatte che si ottengono identificando i lati dei poligoni secondo la sequenze

$$W_1 = a\, e^{-1}\, d\, b^{-1}\, a^{-1}\, c\, e\, b\, c^{-1}\, d^{-1}$$

e

$$W_2 = c\, b^{-1}\, c^{-1}\, e\, a^{-1}\, e^{-1}\, d\, b\, d^{-1}\, a$$

Determinare la classe di omeomorfismo di $S = S_1 \sharp S_2$ nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 2. Tutte le superfici in questo esercizio sono superfici topologiche connesse e compatte. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa giustificando la risposta (dare una dimostrazione o trovare un controesempio).

1. Se $\chi(S_1) = \chi(S_2) = -18$, allora S_1 e S_2 sono omeomorfe.
2. Se S_1, S_2, S_3 e S_4 sono superfici a due a due non omeomorfe, allora $S_1 \sharp S_2$ non è omemorfa a $S_3 \sharp S_4$
3. Esiste una superficie S che ha una suddivisione con 8 vertici, 10 spigoli e 6 facce.

Esercizio 3. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & -12 & -4 \\ -4 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $c_A(t) = (t-2)^2(t+2)^2$ e $c_B(t) = t(t+1)^3$ rispettivamente. Le matrici commutano (non si deve verificare l'affermazione). Determinare una base che le diagonalizza entrambe.

Esercizio 4. Sia A una matrice complessa con polinomio caratteristico $c(t) = (t-3)^2(t-4)^3$. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan e per ciascuna di esse indicare il corrispondente polinomio minimo.

Esercizio 5. Trovare la forma di Jordan della matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Sia data la matrice

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Sapendo che il suo polinomio caratteristico è $c(t) = (1-t)^4$, determinare una matrice J in forma canonica di Jordan e una matrice invertibile M tali che $J = M^{-1}BM$.