Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione n. 10 - 5 dicembre 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice 5×5 con polinomio caratteristico $p_A(t) = (t-\alpha)^5$ e tale che il rango della matrice $(A - \alpha I)$ sia 2. Determinare le possibili forme canoniche di Jordan e per ciascuna di esse indicare il corrispondente polinomio minimo.

Esercizio 2. Trovare la forma di Jordan della matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Trovare la forma di Jordan della seguente matrice a coefficienti complessi al variare del parametro $h \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} h & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & h-2 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$A = [1:0:1], \quad B = [2:1:0], \quad C = [1:1:-1]$$

si mostri che sono allineati e si trovi l'equazione della retta che li contiene.

Esercizio 5. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [1,0,1,2], \quad P_2 = [0,1,1,1], \quad P_3 = [2,1,2,2], \quad P_4 = [1,1,2,3].$$

1. Si dica se P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale.
2. Si calcoli la dimensione del sottospazio generato da P_1, P_2, P_3, P_4 e se ne determinino equazioni cartesiane.
3. Si completi, se possibile, l'insieme $\{P_1, P_2, P_3\}$ ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 6. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia π il piano per

$$P_1 = [1:1:0:0:1], \quad P_2 = [0:-1:0:1:1], \quad P_3 = [1:0:1:0:0]$$

e sia r la retta per

$$Q_1 = [t:0:1:1:2], \quad Q_2 = [0:t:-1:-1:0],$$

dove t è un parametro reale. Determinare, al variare di t, la posizione reciproca di π e r.

Esercizio 7. Determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che

$$f([2:1]) = [1:1],\ f([1:2]) = [0:1],\ f([1:-1]) = [1:0].$$

Esercizio 8. Determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che

$$f([1:2:1]) = [1:0:0] \quad \text{e} \quad f(r) = r', f(s) = s',$$

dove le rette sono date dalle equazioni:

$$r : x_0 - x_1 = 0,\ r' : x_0 + x_1 = 0,\ s : x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ s' : x_1 + x_2 = 0.$$