

## Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

### Foglio di esercizi n. 10 – a.a. 2019-20

Da consegnare mercoledì 11 dicembre

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  una proiettività. Dimostrare che  $f$  è un omeomorfismo.

**Esercizio 2.** Consideriamo il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e i punti dati, in un sistema di riferimento proiettivo, dalle coordinate omogenee  $A = [1 : 0 : 0]$ ,  $B := [1 : 2 : 1]$ ,  $C := [1 : -1 : -1]$  e  $D := [1 : 1 : 0]$ . Dimostrare che i punti dati sono in posizione generale o spiegare perché non lo sono.

**Esercizio 3.** (*Es. 5 dallo scritto di settembre 2018.*) Nello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ , con coordinate omogenee  $(x_0 : \dots : x_3)$ , si considerino il sottospazio proiettivo  $S$  generato dai punti  $(1 : 0 : 3 : 2)$ ,  $(3 : 0 : -1 : 0)$ , e il sottospazio proiettivo  $T$  di equazioni  $x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + ax_1 + 2x_3 = 0$ , dove  $a$  è un parametro reale.

- (1) Determinare, al variare di  $a$ , le dimensioni di  $S$ ,  $T$ ,  $S \cap T$ , e  $S + T$  (il sottospazio proiettivo generato da  $S \cup T$ ).
- (2) Posto  $a \neq -4$ , determinare delle equazioni per  $S + T$ .

**Esercizio 4.** (*Es. 6 dallo scritto di giugno 2017.*) Nello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$  sia  $\pi$  il piano per  $P_1 = [1 : 1 : 0 : 0 : 1]$ ,  $P_2 = [0 : -1 : 0 : 1 : 1]$ ,  $P_3 = [1 : 0 : 1 : 0 : 0]$ , e sia  $r$  la retta per  $Q_1 = [t : 0 : 1 : 1 : 2]$ ,  $Q_2 = [0 : t : -1 : -1 : 0]$ , dove  $t$  è un parametro reale.

Determinare, al variare di  $t$ , la posizione reciproca di  $\pi$  e  $r$ .