Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Foglio di esercizi n. 12 – a.a. 2019-20

Saranno discussi nell'ultimo tutorato, mercoledì 8 gennaio

Esercizio 1. Determinare i punti impropri e le chiusure proiettive delle seguenti curve in $\mathbb{C}^2$:

$$3x+y+1=0, \quad x+i=0, \quad y+6=0, \quad x+2y^2-1=0, \quad 3y+xy+xy^2=0, \quad x^2y^2-1=0.$$

Esercizio 2. *(es. 5 dallo scritto di gennaio 2019)* Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ consideriamo i punti $P_1=[0:1:0]$ e $P_2=[0:0:1]$ e le rette $r_1: x_0-x_2=0$ e $r_2: 2x_0-x_1=0$. Si mostri che l'insieme

$$\mathcal{F}=\{\text{coniche } C \text{ tangenti a } r_i \text{ in } P_i, i=1,2\}$$

è un fascio, e determinarne i punti base e le coniche degeneri.

Esercizio 3. *(es. 5 dallo scritto di febbraio 2019)* Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, contenente almeno una conica non degenere. Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta:

A: $\mathcal{F}$ contiene almeno una conica degenere.
B: $\mathcal{F}$ può contenere 4 coniche degeneri.
C: $\mathcal{F}$ può contenere infinite coniche degeneri.

Esercizio 4. Determinare le rette tangenti alla conica di equazione $x_0^2-x_1^2+x_2^2=0$ e passanti per il punto $(1:0:1)$.

Esercizio 5. Si scriva l'equazione della conica del piano proiettivo reale passante per i punti:

$$(1:0:1),\ (-1:0:0),\ (0:1:1),\ (0:-1:0),\ (1:3:2).$$

Esercizio 6. Sia C la curva di $\mathbb{C}^2$ di equazione

$$f(x,y)=xy^2-y^4+x^3-2x^2y=0.$$

Determinare:
1) i punti impropri di C
2) i punti singolari di C
3) l'equazione della retta tangente a C nel punto $P=(4,-4)$.