Corso di Laurea in Matematica – Geometria 2

Esercitazione di preparazione all'esame - 7 gennaio 2020

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X

$$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ oppure } X \setminus \text{ è compatto nella topologia euclidea.}$$

1. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia su X.
2. Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ è separabile.
3. $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff?
4. Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ è compatto.

Esercizio 2. Consideriamo il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con la topologia usuale e una retta proiettiva $A \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Sia X lo spazio topologico quoziente

$$X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/A;$$

ovvero X è il quoziente del piano proiettivo rispetto alla relazione d'equivalenza $p \sim q$ se e solo se $p = q$ o $p, q \in A$. Calcolare il gruppo fondamentale di X. (Suggerimento: considerare il modello piano del piano proiettivo.)

Esercizio 3. Sia S la superficie che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = aceb^{-1}d^{-1}a^{-1}c^{-1}e^{-1}bd$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici e calcolare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Trovare una matrice invertibile P e una matrice in forma di Jordan J tali che $A = PJP^{-1}$.

Esercizio 5. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e la sua chiusura proiettiva $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$.

1. Sia f la rotazione attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$ che porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(0, 1)$. Si estenda f a una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e se ne trovino i punti fissi. Ci sono rette fisse per F in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?
2. Si consideri la conica in $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 + y^2 + 2xy - y = 0$. Determinarne l'equazione della chiusura proiettiva, i punti all'infinito e indicare a quale famiglia di coniche appartiene.