Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3

Forme differenziali

Alberto Albano

In queste note diamo una panoramica sulla teoria delle forme differenziali definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$ fino al teorema generale di Stokes e i classici teoremi di Gauss-Green, della divergenza e del rotore per le forme e i campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Queste note contengono tutti gli argomenti spiegati a lezione nel corso di Geometria 3, anno accademico 2018/19. Sono presenti anche alcune argomenti solo enunciati o accennati a lezione. Per il programma d'esame, fare riferimento alla pagina Moodle del corso.

Alla fine c'è una breve bibliografia, per approfondimenti e per dimostrazioni solo citate nel testo.

Indice

1 Algebra esterna

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{R}$. Trattiamo esplicitamente solo il caso reale per semplicità di esposizione e perché è il caso che interessa in geometria differenziale. Tutto quello che diremo (salvo menzione esplicita) vale più in generale per ogni campo K di caratteristica 0 ed è particolarmente interessante il caso $K = \mathbb{C}$.

Definizione 1.1. Il *duale* di V, indicato con V^* è

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ lineare}\},$$

l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$.

Gli elementi di V^* sono anche chiamati *funzionali lineari* o *forme lineari*. È immediato dimostrare che V^* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite da:

$$\begin{aligned} &(f+g)(v) = f(v) + g(v), && \forall f, g \in V^*,\ \forall v \in V \\ &(\alpha \cdot f)(v) = \alpha \cdot f(v), && \forall f \in V^*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall v \in V \end{aligned}$$

In analogia alla definizione di forma lineare, possiamo parlare di *forma multilineare* o, quando vogliamo essere specifici, di *forma k-lineare*:

Definizione 1.2. Una funzione $f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ volte}} \to \mathbb{R}$ si dice *forma k-lineare* se è lineare in ogni variabile, cioè se per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$ si ha

$$f(v_1, \ldots, \alpha v_i + \beta w_i, \ldots, v_k) = \alpha f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \beta f(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_k, w_i \in V$.

Quando consideriamo funzioni di più variabili, possiamo richiedere proprietà di simmetria o, come nel caso che ci interessa, di antisimmetria.

Definizione 1.3. Una forma k-lineare f si dice *alternante* se per ogni $1 \leq i < k$ e per ogni $v_1, \ldots, v_k \in V$ si ha

$$f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) = -f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k)$$

Poiché le trasposizioni $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, ..., $(k-1\ k)$ generano il gruppo simmetrico S_k, f è alternante se e solo se per ogni permutazione $\sigma \in S_k$ si ha

$$f(v_1, \ldots, v_k) = (-1)^\sigma f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

dove il simbolo $(-1)^\sigma$ è il *segno* di σ e cioè

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Osservazione. In un campo di caratteristica 2, si ha che $1 = -1$ e quindi una forma è alternante se e solo se è simmetrica, che non è quello che ci interessa. Questo spiega perché dobbiamo considerare solo campi particolari.

È chiaro che la somma di due forme k-lineari alternanti è ancora k-lineare alternante, e anche ogni multiplo scalare di una forma k-lineare alternante lo è. Dunque le forme k-lineari alternanti formano uno spazio vettoriale e poniamo la seguente

Definizione 1.4. Lo spazio vettoriale

$$\bigwedge^k V^* = \{f : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R} \mid f \ k\text{-lineare e alternante}\}$$

si dice la *k-esima potenza esterna* di V^*.

Osservazione. Ci si potrebbe chiedere: esiste la potenza esterna di V (e non solo del duale)? La risposta è sì, ma la definizione di potenza esterna di uno spazio vettoriale in generale è più complicata della definizione che abbiamo appena dato per uno spazio vettoriale *duale*.

Il motivo è che non abbiamo nessuna informazione sugli elementi di uno spazio vettoriale arbitrario V, mentre gli elementi di uno spazio vettoriale duale sono *funzioni* e possiamo usare la loro speciale natura per definire i concetti che ci interessano.

Esempio 1.5. Sia $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$. Se indichiamo con $x_i : V \to \mathbb{R}$ la coordinata i-esima, si ha che $\{x_1, x_2, x_3\}$ è una base di V^*.

Possiamo scrivere delle 2-forme alternanti nel modo seguente: per $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, definiamo $\varphi_{ij} = x_i \wedge x_j$ come

$$\varphi_{12}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_1 \wedge x_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{13}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_1 \wedge x_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{23}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_2 \wedge x_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Le funzioni φ_{ij} sono 2-lineari e alternanti per le proprietà dei determinanti. Notiamo che $a_i = x_i(\mathbf{v}_1)$ e $b_i = x_i(\mathbf{v}_2)$ e quindi potremmo scrivere

$$\varphi_{ij}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (x_i \wedge x_j)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det \begin{pmatrix} x_i(\mathbf{v}_1) & x_i(\mathbf{v}_2) \\ x_j(\mathbf{v}_1) & x_j(\mathbf{v}_2) \end{pmatrix}$$

Più in generale, se h_1, $h_2 \in V^*$ sono due forme lineari, possiamo definire una forma bilineare alternante:

$$(h_1 \wedge h_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det\left(h_i(\mathbf{v}_j)\right), \qquad 1 \le i, j \le 2$$

e se abbiamo una terza forma lineare h_3 possiamo definire una forma trilineare alternante:

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \det\left(h_i(\mathbf{v}_j)\right), \qquad 1 \le i, j \le 3$$

Esercizio 1.6. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano h_1, h_2, h_3 e h_4 forme lineari su V. Dimostrare che $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4 = 0$, cioè

$$(h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = 0 \qquad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$$

Generalizziamo l'esempio precedente: sia V di dimensione n e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base. Sia $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale di V^*, cioè $e_i^* : V \to \mathbb{R}$ è definito da

$$e_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$$

Possiamo definire delle forme k-lineari alternanti nel seguente modo:

$$\left(e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det\left(e_{\alpha_i}^*(\mathbf{v}_j)\right), \qquad 1 \leq i, j \leq k$$

e, in generale, per $h_1, \ldots, h_k \in V^*$

$$(h_1 \wedge \cdots \wedge h_k)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det\left(h_i(\mathbf{v}_j)\right), \qquad 1 \leq i, j \leq k$$

Esercizio 1.7. Dimostrare che, per forme lineari $h_i \in V^*$:

1. $h_1 \wedge h_2 = -h_2 \wedge h_1$;
2. $h \wedge h = 0$;
3. $h_1 \wedge \cdots \wedge h_k = (-1)^\sigma h_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge h_{\sigma(k)}$.

Consideriamo di nuovo le forme k-lineari alternanti della forma $\left(e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)$. Per l'esercizio precedente, a meno del segno possiamo sempre riordinare i termini in modo che $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$.

Esercizio 1.8. Sia $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ e $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$. Dimostrare che

$$\left(e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^*\right)(\mathbf{e}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\beta_k}) = \delta_{\alpha_1\beta_1} \cdot \delta_{\alpha_2\beta_2} \cdot \cdots \cdot \delta_{\alpha_k\beta_k}$$

e cioè vale 1 se $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$ e vale 0 altrimenti.

Possiamo adesso dimostrare il primo risultato sulle potenze esterne:

Proposizione 1.9. *L'insieme*

$$\{e_{\alpha_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}^*\}, \qquad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \quad \alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

è una base di $\bigwedge^k V^*$ *e quindi* $\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}$.

Dimostrazione. Gli elementi indicati sono linearmente indipendenti. Sia infatti

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\left(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*\right) = 0.$$

Valutando sui vettori $(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k})$ con $j_1 < \cdots < j_k$, per l'esercizio precedente si ottiene

$$\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}\left(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*\right)\right)(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k}) = a_{j_1 \ldots j_k} = 0$$

e quindi tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

Sia ora φ una forma k-lineare alternante e poniamo, per ogni $j_1 < \cdots < j_k$

$$b_{j_1 \ldots j_k} = \varphi(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k})$$

Si dimostra allora (esercizio!) che

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} b_{i_1 \ldots i_k}\left(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*\right)$$

e quindi gli elementi indicati generano tutto $\bigwedge^k V^*$. $\square$

Otteniamo quindi che, per $\dim V = n$, si ha $\bigwedge^k V^* = 0$ per $k > n$. Poniamo, per convenzione, $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$ e scriviamo

$$\bigwedge^* V^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V^* = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \bigwedge^2 V^* \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n V^*$$

$\bigwedge^* V^*$ è uno spazio vettoriale, in quanto somma diretta di spazi vettoriali. Abbiamo inoltre visto che c'è una "moltiplicazione" che permette di ottenere elementi di $\bigwedge^k V^*$ a partire da elementi di $V^* = \bigwedge^1 V^*$. Questa moltiplicazione si può estendere a tutto $\bigwedge^* V^*$ nel modo seguente: se $\omega \in \bigwedge^k V^*$ e $\eta \in \bigwedge^s V^*$ possiamo scrivere

$$\omega = \sum_I a_I e_I^*, \qquad \eta = \sum_J b_J e_J^*$$

dove usiamo la notazione con multi-indici: per $I = (i_1, \ldots, i_k)$ un multi-indice di lunghezza $|I| = k$, poniamo $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$. Definiamo allora

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I b_J (e_I^* \wedge e_J^*)$$

Questa operazione, estesa per linearità a tutte le forme, si chiama *moltiplicazione esterna*. Notiamo in particolare che il significato di $(e_I^* \wedge e_J^*)$ è, per definizione,

$$e_I^* \wedge e_J^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_s}^*$$

La proposizione seguente riassume le principali proprietà della moltiplicazione esterna.

Proposizione 1.10. *Siano $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\eta \in \bigwedge^s V^*$, $\theta \in \bigwedge^r V^*$.*

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
2. $(\omega \wedge \eta) = (-1)^{ks} (\eta \wedge \omega)$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Ricordiamo alcune definizioni di algebra. Queste definizioni non sono essenziali nel seguito, ma facilitano la nomenclatura.

Definizione 1.11. Sia A un anello. Il *centro* $C(A)$ di A è l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli elementi di A:

$$C(A) = \{c \in A \mid ca = ac \; \forall\, a \in A\}$$

Il centro di un anello è un sottoanello. A è un anello commutativo se e solo se $A = C(A)$.

Esempio 1.12. Se $A = M_n(\mathbb{R})$, l'anello delle matrici reali quadrate $n \times n$, il centro $C(A)$ è il sottoanello delle matrici *scalari*, cioè delle matrici della forma $\lambda\, \mathrm{I}_n$, multiple della matrice identità.

Definizione 1.13. Un *anello graduato* A è un anello tale che

$$A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$$

dove gli A_k sono gruppi abeliani e la moltiplicazione è tale che

$$A_h \cdot A_k \subseteq A_{h+k}$$

Gli elementi di A_k si dicono *elementi omogenei di grado* k.

Esempio 1.14. $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, l'anello dei polinomi in n indeterminate a coefficienti reali. $A_k =$ polinomi omogenei di grado k. In particolare, $A_0 = \mathbb{R}$.

Definizione 1.15. Una $\mathbb{R}$-*algebra* A è un anello A che contiene (una copia isomorfa di) $\mathbb{R}$ nel suo centro. A risulta in modo naturale uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La moltiplicazione per scalari è semplicemente la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R} \subset A$ per un elemento di A.

Esempio 1.16. Conosciamo già alcuni esempi di $\mathbb{R}$-algebre.

1. $M_n(\mathbb{R})$: il centro di $M_n(\mathbb{R})$ è il sottoanello delle matrici scalari che è isomorfo a $\mathbb{R}$. $M_n(\mathbb{R})$ è detta l'*algebra delle matrici*.
2. $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ è una $\mathbb{R}$-algebra, detta l'*algebra (o anello) dei polinomi.*
3. $\bigwedge^* V^*$, dove V è uno spazio vettoriale reale, è una $\mathbb{R}$-algebra, detta l'*algebra esterna di* V^*.

L'algebra $M_n(\mathbb{R})$ non è commutativa, mentre $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ lo è. Anche l'algebra esterna non è commutativa, però c'è una regolarità nel risultato di invertire i fattori di un prodotto, dovuta ai gradi dei fattori.

Definizione 1.17. Sia $A = \oplus_{k \geq 0} A_k$ un'algebra graduata. A si dice *(anti)commutativa graduata* se

$$a \cdot b = (-1)^{ks} b \cdot a, \qquad \forall\, a \in A_k, \forall\, b \in A_s$$

Quindi l'algebra esterna è un'algebra (anti)commutativa graduata. La ragione del nome è che A è in parte commutativa e in parte anticommutativa. Dire *commutativa graduata* comprende questi due comportamenti.

Se K è un campo arbitrario, si può dare la definizione di K-algebra in modo analogo: A deve essere un anello che contiene K nel suo centro. Le matrici a elementi in K e i polinomi a coefficienti in K sono esempi di K-algebre. Se K ha caratteristica 0 e V è un K-spazio vettoriale, l'algebra esterna $\bigwedge^* V^*$ è ancora una K-algebra graduata anticommutativa.

2 Forme differenziali su un aperto U di $\mathbb{R}^n$

Sull'insieme $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ delle n-uple di numeri reali, sono definite varie strutture, compatibili fra loro. Quelle che ci interessano sono:

1. $\mathbb{R}^n$ **è uno spazio vettoriale**. In questo aspetto i suoi elementi si dicono *vettori* e le operazioni di somma di vettori e di prodotto di un numero reale (detto scalare) per un vettore sono definite componente per componente. È uno spazio vettoriale di dimensione n con una base particolare, che viene detta *base canonica*, data da $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dove $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. In particolare, sono definite le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in se stesso, o in altri spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$.

2. $\mathbb{R}^n$ **è uno spazio vettoriale euclideo**. Il *prodotto scalare* è quello standard, dato dalla formula

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + \dots x_n y_n$$

per $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$. La *norma* di un vettore $\mathbf{u}$ e l'*angolo* fra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono dati da

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}, \qquad \cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

3. $\mathbb{R}^n$ **è uno spazio affine**. In questo contesto, i suoi elementi si dicono *punti*. Una coppia di punti $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$ individua un vettore, che indicheremo con $\overrightarrow{PQ}$, oppure con $Q - P$, di componenti $(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$. In particolare, dato il punto $P = (x_1, \dots, x_n)$, il *vettore posizione* di P è $\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, dove O indica l'origine del riferimento cartesiano. Se $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \mathbf{v}$, si scrive anche $Q = P + \mathbf{v}$, intendendo che Q è il risultato della traslazione di P di vettore $\mathbf{v}$. Ha quindi senso *sottrarre* due punti con risultato un vettore e *sommare* un punto e un vettore con risultato un punto.

4. $\mathbb{R}^n$ **è uno spazio metrico**. Considerando $\mathbb{R}^n$ come spazio affine, la *distanza euclidea* fra due punti P e Q è data da

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

La metrica induce una struttura di *spazio topologico*, in cui una base di intorni di un punto P è data dalle palle aperte $B_r(P)$ di centro P e raggio r, con $r > 0$:

$$B_r(P) = \{Q \in R^n \mid d(P, Q) < r\}$$

Questa topologia viene detta *topologia euclidea* o *topologia standard.*

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Per $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione, le definizioni di *continua* e *differenziabile* sono quelle usuali dell'Analisi Matematica. Nel seguito useremo il termine *funzione differenziabile* per indicare una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$, cioè dotata di derivate parziali continue di ogni ordine. In particolare denotiamo

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ di classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

$\mathcal{C}^\infty(U)$ è un anello con le solite operazioni di somma e prodotto di funzioni, ed è anche uno spazio vettoriale reale e dunque è una $\mathbb{R}$-algebra.

2.1 L'algebra delle forme differenziali

Sia $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ un punto (stiamo considerando $\mathbb{R}^n$ come spazio *affine*). In p possiamo definire lo *spazio tangente* $T_p\mathbb{R}^n$ e il suo duale, lo *spazio cotangente* $T_p^*\mathbb{R}^n$. Gli elementi dello spazio tangente sono i vettori tangenti, e cioè i vettori tangenti alle curve che passano per p. Se parametrizziamo $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\mathbf{x}(u_1, \dots, u_n) = p + u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$$

i vettori tangenti alle curve coordinate $\gamma_i(t) = p + t\mathbf{e}_i$ in $t = 0$ formano una base di $T_p\mathbb{R}^n$. Poiché questi vettori tangenti sono proprio $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, vediamo che per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ c'è un isomorfismo di $\mathbb{R}^n$ (come spazio vettoriale) con $T_p\mathbb{R}^n$.

Siano ora $(x_1, \dots, x_n)$ le coordinate globali di $\mathbb{R}^n$ determinate dalla base canonica e sia $\{\mathbf{e}_1|_p, \dots, \mathbf{e}_n|_p\} = \{\gamma_1'(0), \dots, \gamma_n'(0)\}$ la base di $T_p\mathbb{R}^n$. La base duale è data dai differenziali delle funzioni coordinate in p. Infatti:

$$dx_{i,p}\left(\gamma_j'(0)\right) = \frac{d}{dt}\left(x_i \circ \gamma_j\right)_{|t=0} = \delta_{ij}$$

Dunque $\{dx_{1,p}, \dots, dx_{n,p}\}$ è una base di $T_p^*\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1. Un *campo vettoriale* (tangente) X definito su un aperto U è una famiglia di vettori $X_p \in T_pR^n$ che varia differenziabilmente in funzione di p.

Quindi un campo vettoriale può essere scritto come

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\, \mathbf{e}_i|_p$$

dove le funzioni $f_i(p)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ su U e i vettori $\mathbf{e}_i|_p$ sono i vettori tangenti alle curve coordinate nel punto $p \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.2. Una 1-*forma differenziale* è una famiglia di elementi dello spazio cotangente e quindi si può scrivere

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, dx_i$$

Più in generale

Definizione 2.3. Una k-*forma differenziale* è una famiglia di elementi delle potenze esterne k-esime dello spazio cotangente:

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} g_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

dove i coefficienti $g_{i_1 \dots i_k}(x)$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su U.

L'insieme delle k-forme differenziali su U si denota con $\Omega^k(U)$ ed è uno spazio vettoriale reale (di dimensione infinita). In particolare $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ indica le forme differenziali definite su tutto $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.4. Sia A un anello (commutativo con unità). Un *A-modulo M* (o *modulo sull'anello A*) è un gruppo abeliano con una operazione di moltiplicazione per elementi di A che soddisfa le usuali proprietà di associatività e distributività.

Un modulo è la generalizzazione del concetto di spazio vettoriale quando gli scalari appartengono ad un anello. Naturalmente uno spazio vettoriale è un esempio di modulo.

Poiché ha senso moltiplicare una funzione $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ per una k-forma differenziale, ottenendo ancora una k-forma, $\Omega^k(U)$ è un modulo sull'anello $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Osservazione (per chi conosce i prodotti tensoriali). Si ha

$$\Omega^k(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^k T_p^*\mathbb{R}^n$$

dove $p \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato. Questo isomorfismo vale perché il fibrato cotangente di $\mathbb{R}^n$ è triviale e quindi per ogni coppia di punti p, $q \in \mathbb{R}^n$ c'è un isomorfismo canonico fra $T_p^*\mathbb{R}^n$ e $T_q^*\mathbb{R}^n$ dato da

$$dx_{i,p} \mapsto dx_{i,q}$$

Osservazione. Per definizione una k-forma differenziale è una combinazione lineare a coefficienti funzioni differenziabili di k-forme ottenute mediante il prodotto wedge dei differenziali delle funzioni coordinate. Allora la Proposizione 1.9 implica che $\Omega^k(U)$ è un modulo libero di rango $\binom{n}{k}$ sull'anello $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Possiamo definire un prodotto di forme differenziali, estendendo la definizione data in precedenza: se $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\eta \in \Omega^k(U)$ scriviamo

$$\omega = \sum_I a_I(x)\, dx_I, \qquad \eta = \sum_J b_J(x)\, dx_J$$

dove usiamo la notazione con multi-indici come prima e poniamo

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} a_I(x) b_J(x)\, dx_I \wedge dx_J$$

La Proposizione 1.10 vale con lo stesso enunciato e la stessa dimostrazione:

Proposizione 2.5. *Siano $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^s(U)$, $\theta \in \Omega^r(U)$.*

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
2. $(\omega \wedge \eta) = (-1)^{ks}(\eta \wedge \omega)$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Definiamo quindi, in analogia a quanto fatto prima

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$$

dove, per convenzione, $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$. La moltiplicazione esterna di forme rende $\Omega^*(U)$ un anello (anti)commutativo graduato. $\Omega^*(U)$ è una $\mathbb{R}$-algebra di dimensione infinita come spazio vettoriale e non finitamente generata come algebra.

$\Omega^*(U)$ ha anche una struttura di $\mathcal{C}^\infty(U)$-algebra (lasciamo al lettore studioso il compito di formulare la definizione di A-algebra, dove A è un anello): è un $\mathcal{C}^\infty(U)$-modulo di rango 2^n (una base è data dagli elementi dx_I) e come $\mathcal{C}^\infty(U)$-algebra è finitamente generata: un insieme di generatori è dato da $\{dx_1, \dots, dx_n\}$.

2.2 Il pullback di forme differenziali

Sulle forme differenziali sono definite due importanti funzioni: il *pullback* e la *derivazione esterna*. Vediamo prima il pullback. Ricordiamo che U indica sempre un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sia $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile (ricordiamo che significa di classe $\mathcal{C}^\infty$). f induce una funzione $f^* : \mathcal{C}^\infty(V) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ definita da

$$f^*(g) = g \circ f$$

Notiamo che il verso di f^* è opposto a quello di f. f^* è un omomorfismo di anelli (esercizio!) e poiché $\mathcal{C}^\infty(V) = \Omega^0(V)$ possiamo interpretare questa funzione come $f^* : \Omega^0(V) \to \Omega^0(U)$. Vogliamo estendere questo omomorfismo all'algebra delle forme.

Definizione 2.6. Sia ω una k-forma su $\mathbb{R}^m$. Il *pullback* $f^*\omega$ è la k-forma su $\mathbb{R}^n$ data da

$$f^*\omega_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k))$$

dove $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_p\mathbb{R}^n$ e $df : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ è il differenziale della funzione f nel punto p.

Studiamo ora le proprietà formali della funzione f^*, che consentono di semplificare i calcoli.

Proposizione 2.7. *Sia $f : U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile, ω, η delle k-forme differenziali, $g \in \Omega^0(V)$ una 0-forma (cioè una funzione differenziabile).*

1. $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$
2. $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$
3. *se $\omega_1, \dots, \omega_k$ sono 1-forme, allora*

$$f^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = f^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega_k)$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono semplicemente dei calcoli, applicando la definizione:

1.

$$\begin{aligned} f^*(\omega + \eta)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= (\omega + \eta)_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= \omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) + \eta_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1), \dots, df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= f^*(\omega)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) + f^*(\eta)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \\ &= (f^*\omega + f^*\eta)_{|p}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f^*(g\omega)_{|p}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k) &= (g\omega)_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1),\dots,df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= (g(f(p))\cdot\omega_{|f(p)}(df_p(\mathbf{v}_1),\dots,df_p(\mathbf{v}_k)) \\ &= f^*(g)f^*\omega_{|p}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

3. omettendo per semplicità l'indicazione del punto p si ha:

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k) &= (\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)(df(\mathbf{v}_1),\dots,df(\mathbf{v}_k)) \\ &= \det(\omega_i(df(\mathbf{v}_j))) \\ &= \det(f^*\omega_i(\mathbf{v}_j)) \\ &= f^*(\omega_1)\wedge\cdots\wedge f^*(\omega_k)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

□

Da queste proprietà si può ottenere una descrizione molto semplice del pull-back: è la *formula di sostituzione*, ben nota dalla regola di integrazione. Per vedere ciò, fissiamo le coordinate $(x_1,\dots,x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ e $(y_1,\dots,y_m)$ in $\mathbb{R}^m$. La funzione $f:U\to V$ si scrive in componenti

$$y_1 = f_1(x_1,\dots,x_n), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x_1,\dots,x_n)$$

Sia ora $\omega = \sum a_I dy_I$ una k-forma su V. Usando la proposizione appena dimostrata possiamo scrivere:

$$f^*\omega = \sum f^*(a_I)\,(f^*dy_{i_1})\wedge\cdots\wedge(f^*dy_{i_k})$$

e poiché

$$f^*(dy_i)(\mathbf{v}) = dy_i(df(\mathbf{v})) = d(y_i\circ f)(\mathbf{v}) = df_i(\mathbf{v})$$

otteniamo

$$f^*\omega = \sum a_I(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))\,df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_k}$$

e cioè per calcolare $f^*\omega$ si effettua in ω la "sostituzione" $y_i = f_i$ e $dy_i = df_i$, proprio come nella regola di integrazione per sostituzione. Questo perché, come suggerisce la notazione di Leibniz per gli integrali, l'integrando è una forma differenziale!

Il punto 1. della Proposizione 2.7 dice che $f^*:\Omega^*(V)\to\Omega^*(U)$ è un omomorfismo di gruppi abeliani. Vediamo adesso che è anche un omomorfismo di anelli:

Proposizione 2.8. *Sia $f:U\to V\subseteq\mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile, ω, η due forme differenziali (qualunque) su V. Allora*

$$f^*(\omega\wedge\eta) = (f^*\omega)\wedge(f^*\eta)$$

Dimostrazione. Come prima poniamo $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ e siano $\omega = \sum a_I \, dy_I$, $\eta = \sum b_J \, dy_J$. Si ha

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta) &= f^* \left(\sum_{I,J} a_I b_J \, dy_I \wedge dy_J \right) \\ &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \dots, f_m) \, b_J(f_1, \dots, f_m) \, df_I \wedge df_J \\ &= \sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) \, df_I \wedge \sum_J b_J(f_1, \dots, f_m) \, df_J \\ &= f^*\omega \wedge f^*\eta \end{aligned}$$

□

Il pullback ha ancora una importante proprietà: è *funtoriale*, cioè rispetta la composizione di applicazioni:

Proposizione 2.9. *Se $f : U \to V$ e $g : V \to W$ sono due funzioni differenziabili, allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Omega^*(W)$. Allora

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*\omega &= \sum_I a_I((g \circ f)_1, \dots, (g \circ f)_p) \, d(g \circ f)_I \\ &= \sum_I a_I(g_1(f_1, \dots, f_m), \dots, g_p(f_1, \dots, f_m)) \, dg_I(df_1, \dots, df_m) \\ &= f^*(g^*\omega) = (f^* \circ g^*)(\omega) \end{aligned}$$

□

2.3 La derivazione esterna

Passiamo ora alla derivazione esterna, che generalizza alle k-forme il differenziale di una funzione (cioè di una 0-forma). Se $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione, il differenziale è definito da

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx_i$$

ed è una 1-forma, cioè $d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$. Per le proprietà della derivazione, d è un'applicazione lineare fra spazi vettoriali e inoltre d ha un comportamento speciale rispetto al prodotto: soddisfa la regola di Leibniz, cioè

$$d(fg) = g \, df + f \, dg$$

Definiamo adesso un operatore che trasforma k-forme in $(k+1)$-forme con proprietà analoghe.

Definizione 2.10. Sia $\omega = \sum_I a_I \, dx_I$ una k-forma su $U \subseteq \mathbb{R}^n$. La *derivata esterna* $d\omega$ di ω è

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

Raccogliamo nella proposizione seguenti le principali proprietà della derivazione esterna. Dopo la dimostrazione faremo alcuni commenti ed esempi.

Proposizione 2.11. *Siano ω, η due forme differenziali su $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ *e* $d(c\omega) = c\,d\omega$, *per* $c \in \mathbb{R}$
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, *per* ω *una* k*-forma*
3. $d^2\omega = d(d\omega) = 0$

Dimostrazione.

1. Chiaro dalla definizione.
2. Scriviamo $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$, $\eta = \sum b_J\, dx_J$. Allora:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J)\, dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J\, da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I\, db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{I,J} a_I\, dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

3. Cominciamo con dimostrare l'enunciato nel caso ω una 0-forma, cioè una funzione $f : U \to \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j\right) = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j\right) \end{aligned}$$

I termini con $i = j$ si annullano perché $dx_i \wedge dx_i = 0$. Inoltre, la funzione f è differenziabile (ricordiamo che vuol dire di classe $\mathcal{C}^\infty$) e quindi le derivate seconde miste sono uguali mentre $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ e si ottiene

$$d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Sia ora $\omega = \sum a_I\, dx_I$ una forma qualunque. Per la 1. possiamo supporre $\omega = a_I\, dx_I$ e allora, dalla definizione di d e dalla 2. si ha

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge dx_I - da_I \wedge d(dx_I)$$

Il coefficiente a_I è una funzione e quindi, per quello che abbiamo appena dimostrato, $d(da_I) = 0$. Inoltre, dx_I ha coefficiente costante 1 e quindi

$$d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0.$$

Dunque, $d(d\omega) = 0$.

$\square$

La derivazione esterna è una funzione $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$. Allora la 1. dice che d è $\mathbb{R}$-lineare (cioè d è un'applicazione lineare) e la 2. dice che soddisfa la regola di Leibniz, con una correzione di segno poiché la moltiplicazione in $\Omega^*(U)$ è anticommutativa graduata. In sostanza, *d è una derivazione.*

La 3. ha un'interpretazione algebrica: poiché d porta k-forme in $(k+1)$-forme, possiamo considerare la seguente successione di spazi vettoriali e applicazioni lineari:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U) \xrightarrow{d} \dots$$

La proprietà 3. dice che comporre due applicazioni lineari consecutive dà 0 e cioè che l'*immagine* di un'applicazione è contenuta nel *nucleo* di quella successiva. Definiamo allora:

$$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) = k\text{-forme su } U \textit{ chiuse}$$

$$B^k(U) = \operatorname{Im} d : \Omega^{k-1}(U) \to \Omega^k(U) = k\text{-forme su } U \textit{ esatte}$$

Entrambi sono sottospazi vettoriali di $\Omega^k(U)$ e la 3. dice

$$B^k(U) \subseteq Z^k(U)$$

e cioè *tutte le forme esatte sono chiuse*. Possiamo allora formare il quoziente:

Definizione 2.12. Lo spazio vettoriale quoziente

$$H^k_{dR}(U) = Z^k(U)/B^k(U)$$

viene detto il *k-esimo gruppo di coomologia di de Rham* dell'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Questi gruppi sono definiti usando la struttura differenziabile di $\mathbb{R}^n$ e dei suoi aperti e esprimono proprietà delle funzioni e forme differenziali. Per esempio, dire che $H^k_{dR}(U) = 0$ significa dire che *tutte le k-forme chiuse su U sono esatte*: se $dw = 0$ allora esiste η tale che $\omega = d\eta$ e cioè esiste su U una primitiva di ω. Questo non è sempre vero: se $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ conosciamo (dai corsi di Analisi) una 1-forma chiusa ma non esatta

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

e dunque $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$. Notiamo che la forma ω non è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi non definisce un elemento in $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2)$.

In realtà questi gruppi hanno un significato puramente topologico. Questo è il contenuto di un importante teorema, il *teorema di de Rham*, vedi Teorema 5.7. Come introduzione a questa teoria, nel paragrafo 4 calcoleremo $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n)$ e vedremo sotto quali ipotesi *topologiche* su U si può affermare che la coomologia di de Rham è nulla.

Concludiamo questo paragrafo con un'importante proprietà di compatibilità fra il pullback e la derivazione esterna.

Proposizione 2.13. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile e sia $\omega \in \Omega^k(V)$ una k-forma differenziale su V. Allora:*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Dimostrazione. Anche in questo caso dimostriamo prima l'enunciato per ω una 0-forma. Sia dunque $\omega = g : V \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile data da $(y_1, \dots, y_m) \mapsto g(y_1, \dots, y_m)$ e siano $(x_1, \dots, x_n)$ le coordinate su $\mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^*\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i}\, dy_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}\, dx_j = d(g \circ f) \\ &= d(f^* g) \end{aligned}$$

Sia ora $\omega = \sum_I a_I\, dx_I$. Usando il fatto che f^* è un omomorfismo di anelli, e cioè commuta le somme e il prodotto esterno, e il caso appena dimostrato si ha

$$\begin{aligned} f^*(dw) &= f^*\left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right) = \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge f^*(dx_I) = d\left(\sum_I f^*(a_I)\, f^*(dx_I)\right) \\ &= d(f^*\omega). \end{aligned}$$

□

Questa Proposizione esprime la commutatività di d e f^*, fatto che sarà spesso usato nel seguito: dice che la definizione della derivata esterna è "indipendente dalle coordinate", cioè possiamo prima derivare e poi sostituire oppure prima effettuare la sostituzione e poi derivare ottenendo lo stesso risultato.

3 Esercizi

Questo paragrafo presenta alcuni degli esercizi del do Carmo sulle forme differenziali. I concetti introdotti (divergenza, gradiente, rotore, operatore $*$ di Hodge, forma di volume, ...) verranno usati nella discussione del teorema di Stokes.

Cominciamo con alcune definizioni. Siano ω una k-forma e φ una s-forma definite da

$$\omega = \sum_I a_I\, dx_I, \qquad \varphi = \sum_J b_J\, dx_J$$

Definizione 3.1. L'*operatore $*$ di Hodge* è definito ponendo

$$*(dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}) = (-1)^\sigma (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}})$$

dove $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_{n-k}$, σ è la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & J_{n-k} \end{pmatrix}$$

e $(-1)^\sigma$ indica il *segno* di σ e cioè

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

e poi estendendo per linearità ad una funzione $* : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. (Attenzione: la linearità va intesa come $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-moduli e cioè, se f è una funzione e ω una k-forma, si ha $*(f \cdot \omega) = f \cdot (*\omega)$).

Definizione 3.2. Siano X un campo vettoriale e ω una k-forma. La *contrazione* (o *prodotto interno*), denotata con $\iota_X(\omega)$ oppure $X \lrcorner\, \omega$ è la $(k-1)$-forma definita da

$$X \lrcorner\, \omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$

per ogni scelta di $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$ campi vettoriali.

Definizione 3.3. Per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard su $T_p\mathbb{R}^n$ induce un isomorfismo $^\flat : T_p\mathbb{R}^n \to T_p^*\mathbb{R}^n$ dato da $X_p^b = \omega$, dove ω è tale che

$$X_p^\flat(v_p) = \omega(p)(v_p) = (X_p, v_p)$$

per ogni $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$. In particolare, (esercizio!)

$$(\mathbf{e}_i)^\flat = dx_i$$

L'isomorfismo inverso è denotato con $^\sharp : T_p^*\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$ e quindi, per un campo vettoriale X o per una 1-forma ω si ha

$$X = \sum_i f_i(x)\mathbf{e}_i \longrightarrow X^b = \sum_i f_i(x)\, dx_i$$

e

$$\omega = \sum_i g_i(x)\, dx_i \longrightarrow \omega^\sharp = \sum_i g_i(x)\mathbf{e}_i$$

Definizione 3.4. *(Divergenza di un campo vettoriale)* Un campo vettoriale

$$X = \sum f_i(x)\mathbf{e}_i$$

su $\mathbb{R}^n$ può essere considerato come una funzione $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (le f_i sono le componenti scalari della funzione vettoriale X). Definiamo allora una funzione $\operatorname{div} X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la *divergenza* di X, come

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}(dX)_p$$

dove dX è il differenziale della funzione X. Quindi dX_p è una funzione lineare $dX_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{X(p)}\mathbb{R}^n$ e tr è la sua traccia, che non dipende dal sistema di coordinate usato.

In componenti, nelle basi standard di $T_p\mathbb{R}^n$ e $T_{X(p)}\mathbb{R}^n$, la matrice di dX_p è data da

$$dX_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$$

e quindi

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)$$

Definizione 3.5. *(Gradiente di una funzione)* Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ $\operatorname{grad} f$, il *gradiente* di f, come

$$(\operatorname{grad} f)_p = (df_p)^\sharp$$

dove df è il differenziale della funzione f. Simmetricamente, si ha anche

$$(df)_p = (\operatorname{grad} f)_p^\flat$$

In componenti, $df_p = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, dx_i$ e quindi

$$(\operatorname{grad} f)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, \mathbf{e}_i$$

Definizione 3.6. *(Laplaciano di una funzione)* Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Definiamo una funzione $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il *Laplaciano* di f, come

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Calcolando, si ha che il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana e cioè

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p)$$

Definizione 3.7. *(Rotore di un campo vettoriale)* Sia X un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$. Definiamo una $(n-2)$-forma differenziale $\operatorname{rot} X$, il *rotore* di X, come

$$\operatorname{rot} X = *(dX^\flat)$$

dove $X^\flat$ è la 1-forma che si ottiene dal campo X mediante l'isomorfismo canonico dato dal prodotto scalare.

Notiamo che quando $n = 3$, $\operatorname{rot} X$ è una 1-forma che quindi corrisponde ad un campo vettoriale $Y = (\operatorname{rot} X)^\sharp$. Questo campo Y viene anch'esso chiamato il *rotore* di X.

Svolgiamo i calcoli per $n = 3$:

$$X = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$$

dunque

$$X^\flat = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3$$

Allora

$$dX^\flat = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$$

Calcoliamo l'operatore $*$ di Hodge:

$$*(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3, \qquad *(dx_1 \wedge dx_3) = -dx_2, \qquad *(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1$$

(basta controllare la parità delle permutazioni) e quindi:

$$\operatorname{rot} X = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_1 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_3$$

e il campo vettoriale associato è

$$Y = (\operatorname{rot} X)^\sharp = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \mathbf{e}_3$$

proprio come definito in Analisi Matematica.

ESERCIZI

Esercizio 3.8. Siano ω una k-forma e φ una s-forma. Dimostrare che

1. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$;
2. se ω è una k-forma e k è dispari, allora $\omega \wedge \omega = 0$;
3. dare un esempio di k-forma ω (con $k > 0$) per cui $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Esercizio 3.9. Sia $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che $**\omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$.

Esercizio 3.10. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le forme differenziali

$$\varphi = x\,dx - y\,dy, \qquad \psi = z\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz, \qquad \theta = z\,dy$$

Calcolare $\varphi \wedge \psi$, $\theta \wedge \varphi \wedge \psi$, $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, $*\varphi$, $d(*\varphi)$, $*d\varphi$.

Esercizio 3.11. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le forme differenziali

$$\omega = (2-y)\,dx - xz\,dz, \qquad \psi = dx - 3z\,dy$$

Calcolare $\omega \wedge \psi$, $d\omega$, $d(\omega \wedge \psi)$, $*\omega \wedge \psi$, $*(\omega \wedge \psi)$.

Esercizio 3.12. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile. Supponiamo che $n < m$ e sia ω una k-forma su $\mathbb{R}^m$ con $k > n$. Dimostrare che $f^*\omega = 0$.

Esercizio 3.13. Sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^{2n}$ data da

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

Calcolare il prodotto $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ ripetuto n-volte.
Suggerimento: ω^n è una $2n$-forma e quindi $\omega^n = A \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$. Determinare il coefficiente A.

Esercizio 3.14. Sia dV la n-forma differenziale definita su $\mathbb{R}^n$ da

$$(dV)_p\,(\mathbf{e}_1|_p, \ldots, \mathbf{e}_n|_p) = 1$$

Nota bene: la notazione non implica che dV sia necessariamente il differenziale di una $(n-1)$-forma V (vedi l'esercizio successsivo per ulteriori dettagli). Dimostrare che

1. se $X_i = \sum_j a_{ij}\mathbf{e}_j$, $i = 1, \ldots, n$ sono n campo vettoriali, per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ si ha
$$dV(X_1, \ldots, X_n) = \det(a_{ij}) = \mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_n)$$
(i campi e la forma dV valutati in p) dove $\mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_n)$ è il volume n-dimensionale del parellelepipedo generato dai vettori $X_1, \ldots, X_n$ (cosa succede quando sono linearmente dipendenti?). La forma dV è detta *forma di volume* di $\mathbb{R}^n$;

2. $dV = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$;

3. che relazione c'è fra dV e la forma ω^n dell'esercizio precedente?

Esercizio 3.15. Sia X un campo vettoriale differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e dV la forma di volume su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

1. $d(*X^b) = (\operatorname{div} X)\, dV$ o, equivalentemente, $\operatorname{div} X = *d(*X^\flat)$;

2. in vista del punto precedente, dV è una forma esatta (la risposta è ovvia anche senza il punto precedente, usando il lemma di Poincaré)? se sì, determinare una $(n-1)$-forma ω tale che $d\omega = dV$;

3. se avete risposto sì al punto precedente, esistono *due* $(n-1)$-forme distinte ω e φ tali che $d\omega = d\varphi = dV$?

4. se avete risposto sì al punto precedente, quanto vale $\omega - \varphi$? quante forme "diverse" sapete trovare la cui derivata esterna è dV?

5. se avete trovato molte forme diverse al punto precedente, enunciare con precisione la proprietà

$$\omega, \varphi \text{ sono tali che } d\omega = d\varphi (= dV) \iff \omega - \varphi \ldots$$

6. generalizzando quello che abbiamo visto fino ad adesso, sia $\eta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ una forma *esatta* e poniamo

$$L_\eta = \{\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n) \mid d\omega = \eta\}$$

   η esatta implica che $L_\eta \neq \emptyset$ (per il lemma di Poincaré basterebbe supporre η chiusa). L è uno spazio vettoriale (reale)? Se no, che tipo di struttura algebrica è? Usando il punto precedente e il lemma di Poincaré, determinare L_η. Descrivere con precisione L_{dV}.

   Notiamo che l'equazione $d\omega = \eta$ corrisponde ad un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali.

7. cosa cambia se invece di $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ consideriamo forme in $\Omega^k(U)$, dove U è un dominio (= aperto connesso) qualunque di $\mathbb{R}^n$?

Esercizio 3.16. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni differenziabili, X un campo vettoriale differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e dV la forma di volume su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

1. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)$;

2. $d(*df) = (\Delta f)\, dV$ o, equivalentemente, $\Delta f = *d(*df)$;

3. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$;

4. $*X^\flat = X \lrcorner\, dV$;

5. sia $n = 3$. Allora $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$. Si può dare un senso a quest'affermazione quando $n \neq 3$?

Esercizio 3.17. Una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *(positivamente) omogenea di grado* k se

$$g(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k g(x_1, \ldots, x_n), \quad t > 0,\ (x_1, \ldots, x_x) \in \mathbb{R}^n$$

Notiamo che k può essere un qualunque numero reale.

1. cosa vuol dire omogenea di grado 0? dare un esempio di funzione omogenea di grado 1 che non sia lineare.

2. cosa bisogna cambiare nella definizione per avere funzioni continue di grado negativo?

3. *Identità di Eulero.* g è omogenea di grado k e differenziabile se e solo se

$$x_1 g_{x_1} + x_2 g_{x_2} + \cdots + x_n g_{x_n} = kg$$

   dove g_{x_i} è la derivata parziale rispetto a x_i.

   Questo è un teorema di Analisi 2. Se non lo avete mai visto, cercate di dimostrarlo (non è difficile) oppure cercate una dimostrazione nei libri di Analisi. Attenzione, spesso è un esercizio, proprio come qui.

4. Sia

$$\omega = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$$

   una 1-forma differenziale tale che $a_1, \ldots, a_n$ siano omogenee di grado k e tale che $d\omega = 0$ (ω è chiusa). Allora ω è esatta, e in effetti $\omega = df$ dove

$$f = \frac{1}{k+1} \sum_i x_i a_i$$

   Notiamo che f è omogenea di grado $k + 1$.

5. Sia

$$\sigma = a_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}\, dx_2 \wedge dx_3$$

   una 2-forma differenziale su $\mathbb{R}^3$ tale che i coefficienti siano omogenei di grado k e tale che $d\sigma = 0$ (σ è chiusa). Allora σ è esatta, cioè $\sigma = d\gamma$. Sapete trovare una formula esplicita per la 1-forma γ? (Suggerimento: i coefficienti di γ sono omogenei di grado $k + 2$).

Esercizio 3.18. Per ognuna delle seguenti 1-forme differenziali

$$\omega_1 = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \qquad \text{su } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\omega_2 = \left[\log(x + y) + \frac{x}{x + y}\right] dx + \frac{x}{x + y}\, dy \qquad \text{su } \{x + y > 0\}$$

dire se si tratta di una 1-forma differenziale esatta e, in caso affermativo, determinare una funzione $f_i(x, y)$ tale che $\omega_i = df_i$.

Esercizio 3.19. Dato il campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$

$$X(x, y, z) = \left(\sin(e^{z+x}),\ e^{y^2+z^2},\ \cos(x + z)\right)$$

(a) se ne calcoli il rotore $\operatorname{rot}(X)$. La 2-forma differenziale $\operatorname{rot}(X) \lrcorner\, dV$ è esatta?

(b) se ne calcoli la divergenza $\operatorname{div}(X)$. La 3-forma differenziale $\operatorname{div}(X)\, dV$ è esatta?

4 Il lemma di Poincaré

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e ω una forma differenziale su U. La proprietà *ω è chiusa* è semplice da verificare (basta calcolare la derivata esterna) e come abbiamo visto è una condizione necessaria per la proprietà *ω è esatta* e cioè ω ammette (su U) una primitiva. Questa proprietà è importante, per esempio è esattamente la definizione di *campo conservativo*, per cui la primitiva è il potenziale.

Con il nome di *lemma di Poincaré* si indicano enunciati che affermano che, sotto opportune ipotesi topologiche sull'aperto U, tutte le forme chiuse su U sono esatte. Abbiamo quindi, sotto queste ipotesi, un metodo semplice per determinare l'integrabilità di una forma.

4.1 Il caso delle 1-forme

Cominciamo con un enunciato che vale per le 1-forme, sotto ipotesi "geometriche" sull'aperto U, piuttosto che topologiche.

Definizione 4.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $P \in U$. U si dice *stellato rispetto a P* se per ogni $Q \in U$ il segmento PQ è contenuto in U.

Per esempio, se U è convesso allora U è stellato rispetto ad ogni suo punto. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è stellato.

Proposizione 4.2 (Lemma di Poincaré per le 1-forme)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto stellato e sia $\omega \in \Omega^1(U)$ una 1-forma. Se ω è chiusa allora ω è esatta, cioè esiste $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre, a meno di un cambiamento di coordinate mediante traslazione, che il punto P rispetto a cui U è stellato sia l'origine. La forma ω si scrive

$$\omega = a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$$

e l'ipotesi che sia chiusa significa che per $1 \le i, j \le n$ si ha

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

Definiamo $f : U \to \mathbb{R}$ come

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i \right) dt$$

Dall'ipotesi U stellato rispetto all'origine si ha che i termini sotto il segno di integrale sono definiti e l'integrando è continuo rispetto a t e dunque l'integrale esiste. Dimostriamo adesso che $df = \omega$. Per fare ciò, dobbiamo verificare che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_j\right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n a_j(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_j\right) dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_j\right) t + a_i(tx_1,\ldots,tx_n)\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot x_j\right) t + a_i(tx_1,\ldots,tx_n)\right] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(a_i(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot t) = \big[a_i(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot t\big]_0^1 \\
&= a_i(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

□

4.2 Il caso U semplicemente connesso

L'ipotesi che U sia stellato è piuttosto forte ed è interessante chiedersi se sotto ipotesi più deboli si possa comunque affermare qualcosa sull'esattezza delle 1-forme usando una condizione di natura topologica.

Per prima cosa stabiliamo una relazione fra esattezza e integrale di una 1-forma su cammini. Cominciamo con il caso in cui il cammino α sia differenziabile:

Definizione 4.3. Sia $\alpha : [a,b] \to U$ una mappa differenziabile e sia $\omega \in \Omega^1(U)$. Poniamo

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \alpha^*\omega$$

dove α^* è il pullback di forme.

Notiamo che se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ è un cambiamento di parametro (cioè $\varphi'(s) \neq 0 \forall s$), allora

$$\int_\alpha \omega = \int_{\alpha\circ\varphi} \omega$$

se e solo se $\varphi'(s) > 0 \forall s$ e cioè se φ mantiene l'orientazione. Se invece $\varphi'(s) < 0 \forall s$ allora l'integrale cambia segno.

Osserviamo anche che basta che il cammino sia differenziabile a tratti. L'integrale sarà allora la somma degli integrali sugli intervalli su cui α è differenziabile.

In termini di integrali, è facile caratterizzare le 1-forme esatte.

Proposizione 4.4. *Sia $\omega \in \Omega^1(U)$, con U aperto* connesso. *Sono equivalenti:*

1. *ω è esatta in U;*

2. $\int_\alpha \omega$ *dipende solo dagli estremi del cammino α, per ogni cammino α in U;*

3. $\int_\alpha \omega = 0$, *per tutte le curve* chiuse α *in U.*

Dimostrazione.
1. $\implies$ 2. Se $\omega = df$ è esatta, allora

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \alpha^*(df) = \int_a^b d(\alpha^*(f)) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

e quindi dipende solo dagli estremi del cammino.
2. $\iff$ 3. Immediato dalla definizione di integrale e dal suo comportamento cambiando l'orientazione.
2. $\implies$ 1. Fissiamo un punto $p \in U$ e per ogni $x \in U$ sia α un cammino che congiunge p e x. Definiamo

$$f(x) = \int_\alpha \omega$$

dove poniamo $\omega = \sum_i a_i dx_i$. Per ipotesi $f(x)$ è ben definito e vogliamo dimostrare che $\omega = df$. Basta dunque calcolare le derivate parziali di f. Sia $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ e consideriamo la curva $c_{i,t}(s) = x + s\mathbf{e}_i$, per $0 \le s \le t$. La curva $c_{i,t}$ è un segmento parallelo all'asse i-esimo che congiunge il punto x e il punto $x + t\mathbf{e}_i$ e, per ogni t sufficientemente piccolo, è tutto contenuto nell'aperto U. Dunque:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ f(x + t\mathbf{e}_i) - f(x) \right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{\alpha + c_{i,t}} \omega - \int_\alpha \omega \right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{c_{i,t}} \omega && \text{per l'additività dell'integrale} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t a_i(x + s\mathbf{e}_i)\, ds && \text{pullback di } \omega \text{ lungo } c_{i,t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{a_i(x + \bar{s}\mathbf{e}_i) \cdot t}{t} && 0 < \bar{s} < t \text{ per il teorema del valor medio} \\
&= a_i(x)
\end{aligned}$$

□

Usando il Lemma di Poincaré per aperti stellati, possiamo estendere la definizione di integrale di una forma su cammini solo continui.

Definizione 4.5. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k-forma. ω si dice *localmente esatta* se per ogni $p \in U$ esiste un intorno $p \in V_p \subseteq U$ e una $(k-1)$-forma $\eta \in \Omega^{k-1}(V_p)$ tale che $\omega = d\eta$ su V_p.

Poiché per calcolare $d\omega$ in p basta conoscere ω in un intorno di p, si ha che localmente esatta $\implies$ chiusa. D'altra parte, per ogni $p \in U$ esiste una palla di centro p e raggio ϵ contenuta in U e poiché le palle sono aperti stellati, dalla Proposizione 4.2 si ottiene che per le 1-forme chiusa $\implies$ localmente esatta.

Sia $\alpha : [a, b] \to U$ una curva differenziabile e ω una 1-forma chiusa. Poiché ω è localmente esatta, per ogni punto $p \in U$ esiste una palla aperta B_p su cui ω è esatta. Gli aperti $\{\alpha^{-1}(B_p)\}$ formano un ricoprimento aperto di $[a, b]$ e questo ricoprimento ha un numero di Lebesgue d (l'intervallo $[a, b]$ è metrico compatto). Possiamo dunque trovare una partizione

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$$

(basta che $t_{i+1} - t_i < d$) tale che $\alpha_i = \alpha_{|[t_i, t_{i+i}]}$ ha immagine contenuta in una palla B_i su cui ω è esatta e cioè $\omega = df_i$ su B_i. Allora

$$\int_\alpha \omega = \sum_i \int_{\alpha_i} \omega = \sum_i [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

Osserviamo che per trovare la partizione abbiamo usato solo la *continuità* della funzione α e quindi possiamo fare lo stesso ragionamento per un cammino continuo e definire l'integrale con la sommatoria a destra. Dobbiamo però adesso dimostrare che la somma è indipendente dalla partizione scelta.

Sia $\mathcal{P}$ una partizione e sia $\mathcal{P}'$ il raffinamento che si ottiene aggiungendo un punto $t' \in (t_i, t_{i+1})$. Poiché questo punto ha immagine $\alpha(t') \in B_i$ possiamo usare due volte la primitiva locale f_i ottenendo

$$[f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t'))] + [f_i(\alpha(t')) - f_i(\alpha(t_i))] = [f_i(\alpha(t_{i+1})) - f_i(\alpha(t_i))]$$

e cioè la somma non cambia raffinando la partizione. Se ora $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due partizioni qualunque, possiamo considerare $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Questo è un raffinamento comune e la somma su $\mathcal{R}$ è la stessa che su $\mathcal{P}$ e su $\mathcal{Q}$, che quindi danno la stessa somma.

Rivediamo ora la situazione topologica.

Definizione 4.6. Uno spazio topologico X connesso per archi si dice *semplicemente connesso* se ogni cammino chiuso α in X è omotopo ad un cammino costante.

Si può dare una definizione equivalente di semplicemente connesso utilizzando l'omotopia a estremi fissi. Sia X uno spazio topologico e $\alpha : [0, 1] \to X$ e $\beta : [0, 1] \to X$ due cammini continui con gli stessi estremi, cioè $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$.

Definizione 4.7. I cammini α e β si dicono *omotopi a estremi fissi* se esiste una funzione continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ tale che

1. $H(s, 0) = \alpha(s),\ H(s, 1) = \beta(s) \qquad \forall s \in [0, 1]$
2. $H(0, t) = x_0,\ H(1, t) = x_1 \qquad \forall t \in [0, 1]$

La 1. dice che H è un'omotopia fra α e β e la 2. dice che durante l'omotopia gli estremi dei cammini rimangono fissati.

Si dimostra semplicemente che l'omotopia ad estremi fissi è una relazione di equivalenza e si ha

Proposizione 4.8. *Uno spazio topologico X è semplicemente connesso se e solo se tutti i cammini con gli stessi estremi sono omotopi ad estremi fissi.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Esempio 4.9. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso. Invece $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso.

Possiamo adesso dimostrare il teorema centrale di questo paragrafo:

Teorema 4.10. *Sia ω una 1-forma chiusa su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e siano α, β due cammini in U omotopi ad estremi fissi. Allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

Dimostrazione. Sia H un'omotopia a estremi fissi fra α e β. La funzione H ha dominio $R = [a,b] \times [0,1]$.

Poiché ω è chiusa, è localmente esatta. Come in precedenza per ogni punto $p \in U$ esiste una palla aperta B_p su cui ω è esatta. La famiglia di aperti $\{H^{-1}(B_p)\}$ è un ricoprimento aperto di R e come prima questo ricoprimento ha un numero di Lebesgue d, perché R è metrico compatto.

Dividiamo R in rettangoli R_{jk} con lati paralleli agli assi, in modo che ogni rettangolo abbia diametro minore di d (il diametro di un rettangolo è la lunghezza della sua diagonale) e quindi ogni $H(R_{jk})$ è contenuto in uno degli aperti B_p su cui ω è esatta. Allora

$$\int_{\partial R_{jk}} \omega = 0$$

dove ∂R_{jk} è il bordo del rettangolo R_{jk} (il bordo è una curva chiusa). In effetti per avere una curva in U dovremmo scrivere $H(\partial R_{jk})$. Per semplicità di notazione, tralasciamo l'indicazione di H qui e nella scrittura dei singoli lati di cui è composto il bordo.

Indichiamo dunque i lati del bordo con a_{jk}, $b_{j,k+1}$, $a_{j+1,k}$, b_{jk}, dove i lati a sono orizzontali orientati da sinistra a destra e i lati b sono verticali orientati dal basso verso l'alto. Si ottiene

$$0 = \sum_{jk} \int_{\partial R_{jk}} \omega = \sum_{jk} \left\{ \int_{a_{jk}} \omega + \int_{b_{j,k+1}} \omega - \int_{a_{j+1,k}} \omega - \int_{b_{jk}} \omega \right\}$$

I termini che corrispondono ai lati interni al rettangolo R compaiono due volte (perché sono lati di rettangoli adiacenti) con segni opposti (perché hanno orientazioni opposte) e quindi si cancellano a due a due. Nella somma rimangono solo i lati esterni del rettangoli, con la stessa orientazione di prima e cioè

$$0 = \int_\alpha \omega + \int_{c_b} \omega - \int_\beta \omega - \int_{c_a} \omega$$

dove $c_a = H(a,t)$ e $c_b = H(b,t)$ sono i lati verticali. Ma poiché l'omotopia è a estremi fissi, queste curve sono costanti e quindi l'integrale è zero. Si ottiene finalmente

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

□

Da questo teorema si ha che se U è semplicemente connesso e ω è una 1-forma chiusa l'integrale $\int_a^b \omega$ non dipende dal cammino di integrazione ma solo dagli estremi e quindi dalla Proposizione 4.4 si ottiene il

Teorema 4.11. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ semplicemente connesso e sia ω una 1-forma. Allora ω è chiusa se e solo se è esatta.*

4.3 Il caso U contraibile

Se il dominio U è stellato, la dimostrazione della Proposizione 4.2 può essere estesa alle k-forme chiuse, definendo in modo opportuno la $(k-1)$-forma primitiva. È però più semplice seguire un'altra strada, dimostrando un fatto più generale.

Definizione 4.12. Uno spazio topologico (connesso) X si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente ad un punto, cioè se esiste una funzione continua $H : X \times [0,1] \to X$ tale che

$$\begin{cases} H(x,0) = x_0 & \forall\, x \in X \\ H(x,1) = x & \forall\, x \in X \end{cases}$$

H è un'omotopia fra una funzione costante e la funzione identità di X.

Notiamo che possiamo estendere H ad una funzione continua $H : X \times \mathbb{R} \to X$ ponendo

$$\begin{cases} H(x,t) = x_0 & \forall\, x \in X, \quad \forall\, t < 0 \\ H(x,t) = x & \forall\, x \in X, \quad \forall\, t > 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.13. Dimostrare che se X è contraibile allora X è connesso.

Esempio 4.14. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato rispetto all'origine, allora

$$H(x_1, \ldots, x_n, t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$$

è un'omotopia fra la funzione costante $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ e l'identità di U. In particolare, $\mathbb{R}^n$ è contraibile.

Possiamo adesso enunciare il risultato principale di questo paragrafo:

Teorema 4.15 (Lemma di Poincaré)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contraibile e sia ω una k-forma differenziale chiusa definita su U, cioè $d\omega = 0$, con $k \geq 1$. Allora ω è esatta, cioè esiste una $(k-1)$-forma differenziale α definita su U tale che $d\alpha = \omega$.*

Usando la coomologia di de Rham introdotta nella Definizione 2.12 possiamo enunciare il Lemma di Poincaré come: se U è contraibile (in particolare se $U = \mathbb{R}^n$), allora $H^k_{dR}(U) = 0$ per ogni $k \geq 1$, e in particolare $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Il caso $k = 0$ è diverso (e più semplice): per U un aperto qualunque, se $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che $df = 0$ allora f è localmente costante, cioè costante sulle conponenti connesse di U (questa è una conseguenza immediata del teorema di Lagrange). Viceversa, se f è (localmente) costante allora chiaramente $df = 0$.

Scrivendo $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, dove gli U_i sono le componenti connesse di U, si ha dunque

$$H^0_{dR}(U) = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}$$

(un addendo per ogni componente connessa). Poiché U contraibile implica U connesso, concludiamo che per U contraibile si ha $H^0_{dR}(U) = \mathbb{R}$.

Osserviamo anche che se U e V sono omeomorfi, allora le loro componenti connesse sono in corrispondenza biunivoca e quindi $H^0_{dR}(U) \cong H^0_{dR}(V)$, come previsto dal fatto che la coomologia di de Rham dipende solo dalla *topologia* di U e non dalla sua struttura differenziabile.

Prima di iniziare la dimostrazione, c'è un importante commento da fare: l'ipotesi su U è topologica ma la dimostrazione utilizza il pullback di forme e per definire H^* serve che l'omotopia $H : U \times \mathbb{R} \to U$ sia differenziabile. Ci sono due modi per risolvere questo problema: uno è rafforzare l'ipotesi richiedendo che U sia *differenziabilimente contraibile*, e cioè che l'omotopia H sia una mappa differenziabile. In questo modo si ottiene un teorema più debole.

L'altro è dimostrare il seguente

Lemma 4.16. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se U è contraibile come spazio topologico, allora è differenziabilmente contraibile.*

Questo Lemma è conseguenza immediata del famoso

Teorema 4.17 (Teorema di approssimazione di Whitney)**.** *Siano M e N varietà differenziabili e sia $f : M \to N$ una funzione continua. Allora f è omotopa ad una funzione differenziabile $\tilde{f} : M \to N$. Se f è differenziabile su un sottoinsieme chiuso $A \subseteq M$, allora l'omotopia può essere presa relativa ad A.*

Per una dimostrazione del teorema (che è molto al di là del livello di questo corso), si può vedere Lee, Theorem 6.19.

Per ottenere il Lemma 4.16, basta porre $M = U \times \mathbb{R}$, $N = U$ e $f = H$ l'omotopia fra l'identità di U e una funzione costante. In questo caso, sul sottoinsieme $A = U \times \{0\} \cup U \times \{1\}$ la funzione $f = H$ è già differenziabile, perché è l'identità oppure una costante e quindi otteniamo una funzione differenziabile $\tilde{H} : U \times \mathbb{R} \to U$ (omotopa ad H) che coincide con H su A ed è quindi una omotopia differenziabile fra l'identità e la funzione costante.

Il lemma verrà usato solo nella parte finale della dimostrazione.

Dimostrazione del Teorema 4.15. Siano $(x_1, \ldots, x_n)$ le coordinate su U e t la coordinata su $\mathbb{R}$. Raccogliendo i termini che hanno un differenziale dt, ogni k-forma $\overline{\omega} \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$ si può scrivere in modo unico come

$$\overline{\omega} = \sum a_I \, dx_I + dt \wedge \sum b_J \, dx_J = \omega_1 + dt \wedge \eta$$

dove ω_1 è una k-forma e η una $(k-1)$-forma. Osserviamo che i coefficienti a_I, b_J sono funzioni delle variabili $(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Definiamo una funzione $I : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(U)$ come segue: se

$$\overline{\omega} = \sum a_I \, dx_I + dt \wedge \sum b_J \, dx_J$$

allora

$$I\overline{\omega} = \sum_J \left(\int_0^1 b_J(x_1, \dots, x_n, t)\, dt \right) dx_J$$

Il nome I si riferisce al fatto che la mappa è "integrazione rispetto alla variabile t". Poiché la decomposizione è unica, è chiaro dalle proprietà dell'integrale che I è una funzione lineare.

Consideriamo ora la famiglia di funzioni differenziabili $i_t : U \to U \times \mathbb{R}$ date da $i_t(x) = (x, t)$. La funzione i_t è semplicemente l'inclusione di U nel prodotto a livello t. Le funzioni i_t inducono i pullback $i_t^* : \Omega^k(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^k(U)$ fra forme differenziali. Il punto principale della dimostrazione è la formula

$$i_1^*\overline{\omega} - i_0^*\overline{\omega} = d(I\overline{\omega}) + I(d\overline{\omega}) \tag{1}$$

valida per ogni k-forma $\overline{\omega} \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$.

Per la linearità di I e la decomposizione $\overline{\omega} = \omega_1 + dt \wedge \eta$, basta dimostrare la formula (1) per le forme del tipo

a) $\overline{\omega} = f(x_1, \dots, x_n, t)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$

b) $\overline{\omega} = f(x_1, \dots, x_n, t)\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$

Nel caso a), si ha che

$$d\overline{\omega} = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} + \text{ termini senza } dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} I(d\overline{\omega}) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= [f(x_1, \dots, x_n, 1) - f(x_1, \dots, x_n, 0)]\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= i_1^*\overline{\omega} - i_0^*\overline{\omega} \end{aligned}$$

Poiché $I\overline{\omega} = 0$ in quanto non ci sono termini con dt, anche $d(I\overline{\omega}) = 0$ e la formula è dimostrata.

Nel caso b), $i_1^*\overline{\omega} = i_0^*\overline{\omega} = 0$, in quanto le mappe i_0^* e i_1^* operano mediante la sostituzione $t = 0$ e $t = 1$ rispettivamente. In entrambi i casi, t è costante e quindi dt diventa 0. Calcolando, si ha

$$d\overline{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

e quindi

$$I(d\overline{\omega}) = -\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dt \right) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

(il segno meno viene dallo scambio di ordine fra dx_α e dt prima di integrare). D'altra parte

$$\begin{aligned} d(I\overline{\omega}) &= d\left\{ \left(\int_0^1 f(x_1, \dots, x_n, t)\, dt \right) \right\} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dt \right) dx_\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k-1}} \end{aligned}$$

derivando sotto il segno di integrale e notando che il coefficiente di $I\varpi$ non dipende da t e quindi il differenziale non contiene termini con dt. Dunque $d(I\varpi) + I(d\varpi) = 0$ e la formula vale anche in questo caso.

Notiamo che fino ad ora non abbiamo usato l'ipotesi che U sia contraibile e quindi la formula (1) vale per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia ora U un aperto contraibile e $H : U \times \mathbb{R} \to U$ un'omotopia fra l'identità di U e una funzione costante, che esiste per l'ipotesi di contraibilità. Osserviamo che

$$H \circ i_1 = \mathrm{id}_U = \text{ identità di } U, \qquad H \circ i_0 = x_0 = \text{ funzione costante}$$

Per il Lemma 4.16 possiamo supporre che H sia differenziabile e quindi c'è una mappa indotta fra forme differenziali

$$H^* : \Omega^k(U) \to \Omega^k(U \times \mathbb{R})$$

Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k-forma e poniamo

$$\varpi = H^*\omega \in \Omega^k(U \times \mathbb{R})$$

Poiché il pullback commuta con la composizione (Proposizione 2.9)

$$i_1^*(\varpi) = i_1^*(H^*\omega) = (H \circ i_1)^*(\omega) = \mathrm{id}_U^* \, \omega = \omega$$

$$i_0^*(\varpi) = i_0^*(H^*\omega) = (H \circ i_0)^*(\omega) = \mathrm{cost}^*\omega = 0$$

perché il pullback rispetto a una mappa costante annulla tutti i dx_i. La formula (1) diventa

$$\omega = d(I\varpi) + I(d\varpi)$$

Se ora supponiamo che ω sia chiusa, abbiamo

$$d\varpi = d(H^*\omega) = H^*(d\omega) = H^*(0) = 0$$

per la commutatività del pullback con la derivazione esterna (Proposizione 2.13) e quindi $I(d\varpi) = I(0) = 0$. Otteniamo perciò che per una forma chiusa ω si ha

$$\omega = d(I\varpi)$$

e quindi ω è esatta. Osserviamo che la dimostrazione dà anche una formula per una primitiva di ω, calcolabile esplicitamente se si conosce l'omotopia H in modo esplicito e si sanno calcolare gli integrali nella formula di I. □

Esercizio 4.18. Sia U stellato rispetto all'origine. Possiamo allora usare

$$H(x_1, \ldots, x_n, t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$$

come omotopia (vedi Esempio 4.14), osservando che H è differenziabile. Se ω è una 1-forma su U, determinare $I(\varpi)$ e osservare che è la stessa primitiva usata nella dimostrazione della Proposizione 4.2.

Anche in questo caso semplice, l'espressione esplicita di $I(\varpi)$ per una k-forma è piuttosto complicata e questo è il motivo per cui abbiamo preferito una dimostrazione più astratta ma con meno calcoli.

5 Il teorema di Stokes

L'enunciato del teorema di Stokes è l'uguaglianza fra due integrali. In questi integrali, l'integrando è una forma differenziale. Ci occupiamo per prima cosa di definire con cura i domini di integrazione ammissibili, generalizzando quanto fatto per le 1-forme.

5.1 Catene singolari

Sia $[0,1]$ l'intervallo chiuso e limitato standard in $\mathbb{R}$. Con la notazione $[0,1]^k$ intendiamo il prodotto cartesiano dell'intervallo $[0,1]$ con se stesso k-volte. Possiamo naturalmente pensare $[0,1]^k \subseteq \mathbb{R}^k$.

Definizione 5.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto fissato. Un *k-cubo singolare* in U è una funzione continua $c : [0,1]^k \to U$.

Per $k = 0$ poniamo $[0,1]^0 = \{0\}$ un solo punto. Quindi uno 0-cubo singolare è una funzione $f : \{0\} \to U$ e cioè semplicemente un punto di U. Una curva è un esempio di 1-cubo singolare, così come una superficie parametrizzata è un esempio di 2-cubo singolare.

Osservazione. Il termine *k-cubo* si riferisce ovviamente al fatto che il dominio è effettivamente un cubo k-dimensionale. La parola *singolare* mette in rilievo il fatto che la funzione c è solo continua e non c'è nessuna richiesta di differenziabilità e dunque l'immagine potrebbe avere singolarità. Inoltre, non è richiesto nemmeno che sia iniettiva. La funzione c potrebbe essere costante, ed è importante distinguere la funzione dalla sua immagine.

Un esempio importante di n-cubo singolare in $\mathbb{R}^n$ è l'n-cubo *standard*, dato da $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$, dove $I^n(x) = x$. L'immagine dell'n-cubo standard è proprio il cubo dentro $\mathbb{R}^n$ immerso con un vertice nell'origine.

Una delle proprietà fondamentali degli integrali è l'additività sul dominio: se $a < b < c$ allora, per ogni funzione (continua) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Per generalizzare questa nozione al caso n-dimensionale, procediamo per via algebrica.

Definizione 5.2. Una *k-catena singolare* è una combinazione lineare formale a coefficienti interi di k-cubi singolari.

Per esempio, se c_1, c_2, c_3 sono k-cubi singolari, e cioè funzioni da $[0,1]^k$ in U, l'espressione

$$c = 2c_1 - 5c_2 + c_3$$

è una k-catena singolare. L'insieme di tutte queste espressioni forma un gruppo abeliano, dove l'elemento neutro è la catena che ha tutti i coefficienti nulli e l'oppposto di una catena è la catena che ha gli stessi cubi presi con coefficienti opposti. Per adesso non diamo significato geometrico a queste espressioni.

Il motivo per introdurre le catene è per poter parlare di *bordo*. Per esempio, il bordo del cubo standard $I^1 = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dovrebbe essere costituito da due punti e cioè da due 0-cubi singolari e in particolare non è un cubo singolare.

Inoltre, vogliamo orientare i domini di integrazione e vogliamo che i bordi siano orientati in modo consistente. Per esempio, è sensato definire

$$\partial I^1 = \{1\} - \{0\}$$

dove con $\{a\}$ indichiamo lo 0-cubo singolare dato dalla funzione $c_a : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definita come $c_a(0) = a$ (cioè semplicemente il punto $a \in \mathbb{R}^n$).

Allo stesso modo vogliamo definire ∂I^2 come somma con segno dei quattro lati del bordo, ∂I^3 la somma delle sei facce del cubo e così via. Per dare la definizione corretta, introduciamo delle notazioni.

Sia I^n l'n-cubo standard. Per ogni $0 \leq i \leq n$ definiamo due $(n-1)$-cubi singolari come segue. Per $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$ poniamo

$$I^n_{(i,0)}(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$$
$$I^n_{(i,1)}(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

Quindi $I^n_{(i,\alpha)}$ è una funzione da $[0,1]^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$ e cioè è un $(n-1)$-cubo singolare (non standard). $I^n_{(i,0)}$ è la faccia i-esima a livello 0, $I^n_{(i,1)}$ è la faccia i-esima a livello 1. Per esempio, I^2 è un quadrato e $I^2_{(1,0)}$ e $I^2_{(1,1)}$ sono i lati verticali perché abbiamo fissato la *prima* coordinata (rispettivamente a sinistra e a destra), mentre $I^2_{(2,0)}$ e $I^2_{(2,1)}$ sono i lati orizzontali perché abbiamo fissato la *seconda coordinata* (rispettivamente in basso e in alto). In generale, la faccia i-esima è data dal fissare la coordinata i-esima al valore 0 oppure 1.

Definizione 5.3. Il *bordo* di un n-cubo standard I^n è la $(n-1)$-catena singolare somma di tutte le facce con il segno dato dalla formula

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}$$

Per esempio

$$\partial I^2 = -I^2_{(1,0)} + I^2_{(1,1)} + I^2_{(2,0)} - I^2_{(2,1)} = I^2_{(2,0)} + I^2_{(1,1)} - I^2_{(2,1)} - I^2_{(1,0)}$$

dove dalla seconda espressione si vede che è proprio il bordo del quadrato percorso in verso antiorario. Osserviamo che il bordo di un cubo standard è una catena formata da cubi non standard e cioè da cubi singolari. Per definire il bordo di un cubo singolare (qualunque) definiamo prima le facce: se $c : [0,1]^n \to U$ poniamo

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I^n_{(i,\alpha)}$$

Come prima, $c_{(i,\alpha)} : [0,1]^{n-1} \to U$ è un $(n-1)$-cubo singolare. Poniamo quindi:

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

Per una catena arbitraria, definiamo il bordo per linearità:

$$\partial \left(\sum_i a_i c_i \right) = \sum_i a_i \partial(c_i)$$

Non avremo bisogno di altre proprietà delle catene oltre a quelle dette finora, però è doveroso almeno citare la proprietà caratteristica del bordo:

Proposizione 5.4. *Sia c una catena singolare. Allora $\partial(\partial c) = 0$.*

Dimostrazione. Esercizio. È solo questione di seguire tutte le definizioni e notare che nella sommatoria finale tutti i termini compaiono due volte con segno opposto. Potete vedere i calcoli fatti in Spivak, Theorem 4-12, pag. 99. □

5.2 Integrazione

Vogliamo ora definire l'integrale di una k-forma su una k-catena. Per fare ciò dobbiamo usare catene singolari *differenziabili*, cioè catene del tipo $c = \sum_i a_i c_i$ dove le funzioni $c_i : [0,1]^k \to U$ sono differenziabili. Poiché il dominio non è un aperto, ricordiamo che differenziabile significa che esiste un intorno aperto V di $[0,1]^k$ in $\mathbb{R}^k$ e un'estensione differenziabile della funzione c a V. D'ora in poi dunque con il termine k-catena singolare intenderemo una k-catena differenziabile. Per brevità non useremo più il termine "singolare", però ricordiamo che una catena è una funzione e che, anche se la funzione è differenziabile, l'immagine può avere singolarità, perché non facciamo ipotesi sull'iniettività della funzione o del suo differenziale.

Sia ω una k-forma su $[0,1]^k$. Possiamo quindi scrivere

$$\omega = f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

per una unica funzione f. Poniamo allora, per definizione

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{[0,1]^k} f\, dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

dove l'integrale a secondo membro è l'usuale integrale di una funzione di n variabili. Osserviamo che è importante scrivere la forma ω con i differenziali in ordine crescente di indice, altrimenti la funzione f non è unicamente definita. Per esempio, se $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_1$, allora $\omega = -x_1\, dx_1 \wedge dx_2$ e quindi

$$\int_{[0,1]^2} \omega = \int_{[0,1]^2} -x_1\, dx_1 dx_2$$

Definizione 5.5. Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una k-forma sull'aperto U e sia c un k-cubo in U. Allora si pone

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*(\omega)$$

In particolare, per $c = I^k$ il cubo standard e $\omega = f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ si ha

$$\int_{I^k} \omega = \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \int_{[0,1]^k} f\, dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

in accordo con la definizione precedente. Notiamo che per $k = 0$ dobbiamo fare una convenzione speciale: una 0-forma ω è una funzione differenziabile e uno 0-cubo $c : \{0\} \to U$ dà un punto di U poniamo allora, per definizione

$$\int_c \omega = \omega(c(0))$$

il valore della funzione ω nel punto $c(0) \in U$.

Una k-catena è una combinazione lineare di k-cubi e estendiamo la definizione di integrale per linearità: se $c = \sum_i a_i c_i$ si ha

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega$$

Nel caso $k = 1$ la forma ω è una 1-forma $\omega = f_1\, dx_1 + \cdots + f_n\, dx_n$ e un 1-cubo è semplicemente una curva differenziabile (non necessariamente regolare). In questo caso la definizione 5.5 di integrale è l'usuale definizione di *integrale di linea* o *integrale di seconda specie* vista nei corsi di Analisi Matematica.

5.3 Il teorema di Stokes

Le formule $d^2 = 0$ per la derivazione esterne e $\partial^2 = 0$ per l'operazione di bordo fanno supporre che ci sia una relazione fra questi due concetti. Il teorema generale che esprime questa relazione è il famoso

Teorema 5.6 (Teorema di Stokes)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ una $(k-1)$-forma e c una k-catena in U. Allora*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

Osserviamo subito che per $k = 1$ e $c = I^1$ il cubo standard, il teorema di Stokes non è altro che il teorema fondamentale del calcolo integrale (scrivere l'espressione esplicita per convincersene).

La dimostrazione del teorema di Stokes non è difficile e consiste nel calcolo diretto dei due termini presenti nella formula.

Dimostrazione del teorema di Stokes. Cominciamo con il caso: $c = I^k$ e ω una $(k-1)$-forma su $[0,1]^k$. Allora

$$\omega = \sum_i f_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k$$

dove il simbolo $\widehat{dx_i}$ significa che il corrispondente dx_i è omesso. Basta dunque dimostrare la formula per ognuno dei termini nella sommatoria.

Calcoliamo il termine a destra dell'uguale. Il bordo ∂I^k è una somma di $(k-1)$-cubi (le facce di I^k) e per il termine di indice (j, α) si ha:

$$\int_{I^k_{(j,\alpha)}} f_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k = \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\alpha)})^* (f_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \text{ perché } dx_j = 0 \\ & \text{in quanto } x_j \text{ è costante} \\ \displaystyle\int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \ldots, \alpha, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k & \text{se } i = j \end{cases}$$

Ricordando la formula del bordo per I^k possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I^k} \omega &= \int_{\partial I^k} \sum_i f_i \, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\alpha)})^* (f_i \, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k) \\
&= \boxed{\begin{aligned} &(-1)^{i+1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \\ &\qquad + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \end{aligned}}
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora il termine a sinistra dell'uguale:

$$\begin{aligned}
\int_{I^k} d\omega &= \int_{I^k} d\left(f_i \, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k \right) \\
&= \int_{I^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_1 \ldots dx_i \ldots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \Big[f_i(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k) - f_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k) \Big] dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \\
&= \boxed{\begin{aligned} &(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \\ &\qquad + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f_i(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \end{aligned}}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di Fubini per integrare prima rispetto a x_i e il teorema fondamentale del calcolo integrale per calcolare l'integrale più interno.

Poiché i due termini evidenziati sono uguali, il teorema è dimostrato per il cubo standard $c = I^k$. Se c è un cubo arbitrario, dalla definizione di integrale e di pullback si ha

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^*(\omega)$$

e quindi

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*(\omega) = \int_{\partial c} \omega$$

Infine, se $c = \sum_i a_i c_i$ è una catena arbitraria, per linearità

$$\int_c d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c_i} \omega$$

e questo conclude la dimostrazione del teorema di Stokes per una catena arbitraria. $\square$

5.4 Esempi di catene singolari e integrazione

Vediamo alcuni esempi di scrittura come catena singolare per sottoinsiemi semplici in $\mathbb{R}^n$.

1. Il disco in $\mathbb{R}^2$. Sia $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ il disco di centro l'origine e raggio R. Allora la funzione $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$c(\rho,\theta) = (\rho R\cos(2\pi\theta), \rho R\sin(2\pi\theta))$$

ha come immagine il disco D_R. Calcoliamo il bordo. Ricordiamo che

$$\partial c = -c_{(1,0)} + c_{(1,1)} + c_{(2,0)} - c_{(2,1)}$$

dove $c_{(i,j)}$ è la restrizione di c alla faccia(i,j) di I^2. Più semplicemente, per un quadrato, il bordo è formato dai quattro lati percorsi in verso antiorario. Dunque

$$\partial c = c_{|\theta=0} + c_{|\rho=1} - c_{|\theta=1} - c_{|\rho=0}$$

e analizzando i quattro termini si ha

- $c_{|\theta=0}$ è il raggio orizzontale percorso dal centro al punto $P = (R,0)$
- $c_{|\rho=1}$ è la circonferenza di raggio R percorsa in verso antiorario a partire dal punto $P = (R,0)$
- $c_{|\theta=1}$ è il raggio orizzontale percorso dal centro al punto $P = (R,0)$
- $c_{|\rho=0}$ è il cammino costante nel centro

Dunque $c_{|\theta=0} = c_{|\theta=1}$ e quindi i due termini si semplificano. D'altra parte, l'integrale su un cammino costante di una 1-forma è nullo (perché il pullback si annulla) e quindi in questo caso il teorema di Stokes si scrive, per una 1-forma ω su $\mathbb{R}^2$

$$\int_{D_R} d\omega = \int_{C_R} \omega$$

dove C_R è la circonferenza di raggio R.

Si può scrivere il disco come catena in modo che il bordo sia esattamente la circonferenza? È facile trovare una catena continua, basta retrarre un quadrato sul cerchio e il bordo è la somma di 4 archi di circonferenza. Per esercizio, trovare una catena differenziabile.

2. Una corona circolare in $\mathbb{R}^2$. Sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 R_1^2 \mid x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ la corona circolare di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2. Il cubo singolare è

$$c(\rho,\theta) = ((R_1 + \rho(R_2 - R_1))\cos(2\pi\theta), (R_1 + \rho(R_2 - R_1))\sin(2\pi\theta))$$

in modo che per $0 \leq \rho \leq 1$ percorriamo il segmento $[R_1, R_2]$. La formula per il bordo è la stessa di prima e si ha:

- $c_{|\theta=0}$ è il raggio orizzontale percorso dal punto $P = (R_1, 0)$ al punto $Q = (R_2, 0)$
- $c_{|\rho=1}$ è la circonferenza di raggio R_2 percorsa in verso antiorario a partire dal punto $Q = (R_2, 0)$

- $c_{|\theta=1}$ è il raggio orizzontale percorso dal punto $P = (R_1, 0)$ al punto $Q = (R_2, 0)$
- $c_{|\rho=0}$ è la circonferenza di raggio R_1 percorsa in verso antiorario a partire dal punto $P = (R_1, 0)$

Come prima $c_{|\theta=0} = c_{|\theta=1}$ e quindi si semplificano. Il bordo allora è la catena

$$\partial c = c_{|\rho=1} - c_{|\rho=0}$$

cioè è formato da due circonferenze percorse in versi opposti (quella esterna antiorario, quella interna orario).

3. La sfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$. Sia $S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ la sfera. Con la parametrizzazione solita si può scrivere:

$$c(\varphi, \theta) = (R\cos(2\pi\varphi)\sin(\pi\theta), R\sin(2\pi\varphi)\sin(\pi\theta), R\cos(\pi\theta))$$

Il bordo è

- $c_{|\theta=0}$ è il cammino costante al polo nord $N = (0, 0, R)$
- $c_{|\varphi=1}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N al polo sud S
- $c_{|\theta=1}$ è il cammino costante al polo sud $S = (0, 0, -R)$
- $c_{|\varphi=0}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N al polo sud S

Anche in questo caso i due meridiani si cancellano e il resto del bordo è composto da punti, su cui ogni integrale di una 2-forma è nullo.

4. La semisfera di raggio R in $\mathbb{R}^3$. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$ la semisfera al di sopra il piano xy. Con la stessa parametrizzazione di prima si ha:

$$c(\varphi, \theta) = (R\cos(2\pi\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}\,\theta), R\sin(2\pi\varphi)\sin(\frac{\pi}{2}\,\theta), R\cos(\frac{\pi}{2}\,\theta))$$

(notare che $\theta \in [0, 1]$ e quindi $z \geq 0$). Il bordo è

- $c_{|\theta=0}$ è il cammino costante al polo nord $N = (0, 0, R)$
- $c_{|\varphi=1}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N all'equatore
- $c_{|\theta=1}$ è l'equatore
- $c_{|\varphi=0}$ è il meridiano sul semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ percorso dal polo nord N all'equatore

Anche in questo caso i due meridiani si cancellano e il resto del bordo, come catena, è composto dall'equatore e dal polo nord. Il polo nord non contribuisce all'integrale di 1-forme e quindi

$$\int_X d\omega = \int_C \omega$$

dove C è l'equatore.

5. Il toro in $\mathbb{R}^3$. Anche qui, usando la parametrizzazione standard del toro, si vede che il toro è un 2-cubo singolare, e il bordo è nullo. Scrivere per esercizio tutti i dettagli.

5.5 Dualità fra catene e forme

Prima della dimostrazione del teorema di Stokes abbiamo osservato la somiglianza fra le proprietà $d^2 = 0$ e $\partial^2 = 0$. Per interpretarne correttamente il significato, occorre sviluppare l'appropriato ambito algebrico. Qui di seguito diamo alcuni dettagli di questa costruzione. **Questa parte non è compresa nel programma dell'esame di Geometria 3**.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ fissato. Negli spazi vettoriali $\Omega^k(U)$ delle forme differenziali, abbiamo individuato due sottospazi,

$$Z^k(U) = \ker d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U) = k\text{-forme su } U \text{ } \textit{chiuse}$$

$$B^k(U) = \operatorname{Im} d : \Omega^{k-1}(U) \to \Omega^k(U) = k\text{-forme su } U \text{ } \textit{esatte}$$

La proprietà $d^2 = 0$ implica che $B^k(U)$ è un sottospazio di $Z^k(U)$ e si può quindi considerare lo spazio vettoriale quoziente

$$H^k_{dR}(U) = Z^k(U)/B^k(U)$$

detto k-esimo gruppo di coomologia di de Rham (definizione 2.12).

Anche l'insieme di tutte le catene singolari su U forma un gruppo. Per avere la giusta costruzione dobbiamo considerare catene a coefficienti *reali*. Definiamo

$$C_k(U, \mathbb{R}) = \left\{ c = \sum_i a_i c_i \mid c_i \ k\text{-cubo singolare, } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

In questo modo $C_k(U, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale e i suoi elementi sono detti *catene singolari a coefficienti reali.* Poiché in questo paragrafo considereremo solo questo tipo di catene, le chiameremo semplicemente catene reali.

La definizione di integrale di una k-forma su una k-catena reale è la stessa data per le catene a coefficienti interi. Se $c = \sum_i a_i c_i$ allora $\displaystyle\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{c_i} \omega$.

In analogia alla definizione di forme chiuse ed esatte, possiamo considerare i due sottospazi vettoriali di $C_k(U, \mathbb{R})$ nucleo ed immagine della mappa bordo ∂

$$Z_k(U, \mathbb{R}) = \ker \partial : C_k(U, \mathbb{R}) \to C_{k-1}(U, \mathbb{R})) = k\text{-cicli}$$

$$B_k(U, \mathbb{R}) = \operatorname{Im} \partial : C_{k+1}(U, \mathbb{R}) \to C_k(U, \mathbb{R}) = k\text{-bordi}$$

Naturalmente $\partial^2 = 0$ implica che $B_k(U, \mathbb{R}) \subseteq Z_k(U, \mathbb{R})$ e possiamo quindi formare lo spazio vettoriale quoziente:

$$H_k(U, \mathbb{R}) = Z_k(U, \mathbb{R})/B_k(U, \mathbb{R})$$

che viene detto *k-esimo gruppo di omologia singolare (a coefficienti reali).*

Sia $\omega \in \Omega^k(U)$ una forma fissata. La funzione

$$\int_{-} \omega : C_k(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$c \mapsto \int_c \omega$$

è lineare perché l'integrale è lineare rispetto al dominio di integrazione (per definizione di integrale su una catena) e cioè è un elemento dello spazio vettoriale duale $C_k(U, \mathbb{R})^*$. Dunque ad ogni forma associamo un elemento del duale e cioè abbiamo una funzione

$$\int : \Omega^k(U) \to C_k(U, \mathbb{R})^*$$

$$\omega \mapsto \int_{-} \omega$$

che è lineare perché l'integrale è lineare rispetto all'integrando.

Gli spazi vettoriali $\Omega^k(U)$ e $C_k(U, \mathbb{R})$ sono di dimensione infinita e non sono in generale interessanti. Restringiamoci quindi al sottospazio $Z^k(U)$ delle forme chiuse e integriamo solo sui cicli: abbiamo una funzione

$$\int : Z^k(U) \to Z_k(U, \mathbb{R})^*$$

$$\omega \mapsto \int_{-} \omega$$

Cosa capita se ω è esatta? Se $\omega = d\eta$, per il teorema di Stokes si ha

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0$$

perché integriamo solo sui *cicli*: $\partial c = 0$. Dunque le forme esatte sono contenute nel nucleo dell'integrale e quindi la funzione passa al quoziente e cioè possiamo scrivere

$$\int : \; Z^k(U)/B^k(U) \to Z_k(U, \mathbb{R})^*$$

Cosa capita se c è un bordo? Se $c = \partial b$, dove $b \in C_{k+1}(U, \mathbb{R})$ di nuovo per il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_c \omega = \int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0$$

perché consideriamo solo forma *chiuse*: $d\omega = 0$. Dunque l'integrale si annulla sul sottospazio dei bordi e cioè definisce una funzione lineare sul quoziente $Z_k(U, \mathbb{R})/B_k(U, \mathbb{R})$. In conclusione, dal teorema di Stokes si ottiene che l'integrale fornisce una funzione lineare

$$\int : H^k_{dR}(U) \to (H_k(U, \mathbb{R}))^*$$

fra la coomologia singolare e (il duale del)l'omologia singolare.

Tutta questa teoria può essere generalizzata al caso di una varietà differenziabile M defininendo le forme differenziali e le catene singolari su M. Il culmine è dato dal famoso

Teorema 5.7 (Teorema di de Rham)**.** *Se M è una varietà differenziabile, la funzione lineare*

$$\int : H^k_{dR}(M) \to (H_k(M, \mathbb{R}))^*$$

è un isomorfismo e cioè la coomologia di de Rham è il duale dell'omologia singolare.

L'importanza di questo teorema è che la coomologia di de Rham è definita tramite la struttura differenziabile mentre l'omologia singolare è una costruzione puramente topologica. Si può infatti dimostrare che i gruppi di omologia costruiti a partire dalle catene differenziabili sono isomorfi a quelli costruiti a partire dalle catene continue. Dunque è possibile "vedere" proprietà topologiche usando strumenti differenziabili e, dualmente, la struttura topologica impone vincoli alle possibili strutture differenziabili.

5.6 I teoremi classici: Gauss-Green, divergenza, rotore

Abbiamo definito nell'Esercizio 3.14 la forma di volume dV su $\mathbb{R}^n$ con la formula

$$(dV)_p\,(\mathbf{e}_1|_p, \ldots, \mathbf{e}_n|_p) = 1$$

La forma dV nel punto p associa alla base standard orientata dello spazio tangente $T_p\mathbb{R}^n$ il numero 1. La proprietà fondamentale della forma di volume è la seguente: sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e definiamo (quando esiste l'integrale)

$$\mathrm{vol}(U) = \int_U dV$$

Si ottiene in questo modo un buon concetto di *misura n-dimensionale*: se $\dim U < n$, allora l'integrale di una n-forma è certamente nullo perché i differenziali $dx_1, \ldots, dx_n$ sono linearmente dipendenti su U e quindi $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0$ su U. Altrimenti l'integrale ha le usuali proprietà di positività, additività e monotonia di una misura.

Vogliamo considerare adesso una superficie regolare orientata $S \in \mathbb{R}^3$ e trovare la forma di volume su S, che di solito si chiama *elemento di area.* Se $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione locale, abbiamo la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ di T_pS. Ponendo come al solito

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

si ha che la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ ha la stessa orientazione standard di $\mathbb{R}^3$. Il campo normale $\mathbf{N}$ dà quindi su S l'orientazione indotta dallo spazio ambiente.

Con questa definizione del campo $\mathbf{N}$, definiamo una 2-forma dA su S come

$$dA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}$$

per $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS$. dA è una forma bilineare alternante su T_pS e cioè appartiene a $\bigwedge^2(T_pS)^*$. Per definizione

$$dA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{N}$$

e poiché per ogni coppia di vettori in T_pS il prodotto vettoriale è parallelo al vettore normale $\mathbf{N}$, si ha che

$$dA(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \pm\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|$$

dove il segno dipende dall'orientazione di $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ come base di T_pS (se sono linearmente dipendenti, il prodotto esterno è nullo e non c'è problema di scelta del segno).

Consideriamo il cubo singolare $\mathbf{x} : U \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ dato dalla parametrizzazione: in generale, non è detto che il dominio U sia un quadrato standard, ma si può suddividere in cubi singolari, calcolare il contributo di ogni cubo e poi sommare (cioè pensiamo $\mathbf{x}$ come una catena). Calcoliamo il pullback della forma dA: per $p \in U$, sia $\{\mathbf{e}_1|_p, \mathbf{e}_2|_p\}$ la base dello spazio tangente T_pU. Il differenziale $d\mathbf{x}$ della parametrizzazione agisce come

$$d\mathbf{x}(\mathbf{e}_1|_p) = \mathbf{x}_u, \qquad d\mathbf{x}(\mathbf{e}_2|_p) = \mathbf{x}_v$$

e quindi dalla definizione 2.6 di pullback di forme si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(dA)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = dA(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \det\begin{pmatrix}\mathbf{x}_u\\ \mathbf{x}_v\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} &= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)\cdot\mathbf{N}\\
&= (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v)\cdot\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|\\
&= \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}$$

e dunque

$$\int_S dA = \int_{[0,1]^2} \mathbf{x}^*(dA) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

e ritroviamo la formula che definisce l'area di una superficie. Dunque dA è proprio l'elemento di area. C'è però un'espressione più semplice per l'elemento d'area su una superficie, che si può usare nelle applicazioni del teorema di Stokes.

Teorema 5.8. *Sia S una superficie regolare orientata in $\mathbb{R}^3$ (anche con bordo) e sia $\mathbf{N}$ il campo normale orientato come prima. Allora*

$$dA = N_1\, dy \wedge dz + N_2\, dz \wedge dx + N_3\, dx \wedge dy$$

dove $\mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3$ è la scrittura di $\mathbf{N}$ in componenti. Inoltre, su S abbiamo le uguaglianze

$$\begin{aligned}
N_1 dA &= dy \wedge dz\\
N_2 dA &= dz \wedge dx\\
N_3 dA &= dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Queste uguaglianze di forme differenziali su S significano che i due membri delle uguaglianze agiscono allo stesso modo sui vettori tangenti a S (ma non su vettori generali di $\mathbb{R}^3$).

Dimostrazione. Sviluppando il determinante che definisce dA lungo l'ultima riga e usando la definizione di prodotto wedge di 1-forme si ha

$$\begin{aligned} dA(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= N_1(v_2w_3 - v_3w_2) + N_2(v_3w_1 - v_1w_3) + N_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= N_1\, dy \wedge dz(\mathbf{v},\mathbf{w}) + N_2\, dz \wedge dx(\mathbf{v},\mathbf{w}) + N_3\, dx \wedge dy(\mathbf{v},\mathbf{w}) \end{aligned}$$

(attenzione ai segni dello sviluppo!) e si ottiene la prima uguaglianza. Possiamo riscrivere questa uguaglianza usando l'operatore di Hodge: si ha

$$N_1 dy \wedge dz + N_2 dz \wedge dx + N_3 dx \wedge dy = *\mathbf{N}^b$$

e ricordando la definizione 3.2 di contrazione di una forma differenziale per un campo vettoriale si ha

$$dA(\mathbf{v},\mathbf{w}) = dV(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{N}) = dV(\mathbf{N},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{N} \lrcorner\, dV(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

Dunque l'uguaglianza è

$$\mathbf{N} \lrcorner\, dV = *\mathbf{N}^b$$

e abbiamo risolto l'Esercizio 3.16, punto 4, per $n = 3$ e $X = \mathbf{N}$, il campo normale. È evidente che questa dimostrazione vale per ogni n e per ogni campo vettoriale X, prestando attenzione ai segni nello sviluppo del determinante e nel calcolo dell'operatore di Hodge.

Per dimostrare le altre uguaglianze, siano $\mathbf{v},\mathbf{w} \in T_pS$. Allora $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \alpha\mathbf{N}$ e scriviamo

$$N_1 dA(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \cdot \mathbf{N}) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N})\alpha = \mathbf{e}_1 \cdot \alpha\mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = dy \wedge dz(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

e otteniamo la prima. Usando $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in modo simile, si ottengono le altre due. □

Siamo ora pronti a rivedere i teoremi classici e seguiamo la presentazione del libro di Spivak. Questi teoremi si possono enunciare per varietà con bordo. Noi ci limiteremo a versioni nel piano e nello spazio.

Teorema 5.9 (Il teorema di Gauss-Green nel piano)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio compatto con bordo un insieme di curve differenziabili regolari, orientate in modo da avere il dominio "alla sinistra" (cioè i bordi esterni sono percorsi in verso antiorario, quelli interni in verso orario). Siano $P, Q : S \to \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili. Allora*

$$\int_{\partial S} P\, dx + Q\, dy = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dimostrazione. Basta porre $\omega = P\, dx + Q\, dy$ e notare che

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Scrivendo S come una 2-catena differenziabile, il teorema è un caso particolare del teorema di Stokes 5.6. □

Teorema 5.10 (Teorema della divergenza)**.** *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio compatto con bordo un insieme di superfici orientate regolari, e sia $\mathbf{N}$ il campo normale con l'orientazione standard sul bordo ∂M. Sia $\mathbf{F} : M \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale differenziabile. Allora*

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_{\partial M} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \, dA$$

Dimostrazione. Dall'Esercizio 3.15, punto 1 si ha la formula

$$d(*X^b) = (\operatorname{div} X) \, dV$$

per un campo differenziabile X. Applicando il teorema di Stokes si ha

$$\int_M \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \int_M d(*\mathbf{F}^b) = \int_{\partial M} *\mathbf{F}^b$$

Come prima si ha

$$*\mathbf{F}^b = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

e dal Teorema 5.8 sulla superficie bordo ∂M si ha

$$\begin{aligned} N_1 dA &= dy \wedge dz \\ N_2 dA &= dz \wedge dx \\ N_3 dA &= dx \wedge dy \end{aligned}$$

e quindi su ∂M abbiamo

$$*\mathbf{F}^b = F_1 N_1 \, dA + F_2 N_2 \, dA + F_3 n_3 \, dA = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \, dA$$

ottenendo dunque la tesi. □

Teorema 5.11 (Teorema di Stokes o del rotore)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con bordo. Sia $\mathbf{N}$ il campo normale che dà l'orientazione su S e diamo al bordo ∂S l'orientazione indotta. Sia $\mathbf{t}$ il campo tangente unitario su ∂S e sia s l'arcolunghezza. Sia $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo differenziabile (definito e differenziabile su un aperto contentente S.) Allora*

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \, dA = \int_{\partial S} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) \, ds$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$. Ricordiamo che la Definizione 3.7 di rotore

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = *(d\mathbf{F}^b)$$

produce una $(n-2)$-forma differenziale e quindi, nel caso $n = 3$ abbiamo una 1-forma che può essere interpretata come un campo vettoriale. Dunque in questo caso la definizione che stiamo usando è

$$\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{F} = (*d\mathbf{F}^b)^\sharp$$

Subito dopo la definizione 3.7 di rotore abbiamo svolto i calcoli che mostrano come nel caso $n = 3$ la definizione generale coincide con la definizione nota dai corsi di Analisi Matematica e di Fisica.

Come nella dimostrazione precedente, usando le uguaglianze del teorema 5.8, si ha:

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{N})\, dA = R_1 dy \wedge dz + R_2 dz \wedge dx + R_3 dx \wedge dy = *(\mathbf{R}^b)$$

Si ha

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{N})\, dA = *(\mathbf{R}^b) = *(((*d\mathbf{F}^b)^\sharp)^b) = **\,(d\mathbf{F}^b) = d\mathbf{F}^b$$

Dunque, usando il teorema di Stokes possiamo scrivere

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N})\, dA = \int_S d\mathbf{F}^b = \int_{\partial S} \mathbf{F}^b$$

e dobbiamo calcolare l'ultimo integrale. Sulla curva ∂S si hanno le uguaglianze (simili a quelle usate più volte per l'elemento d'area)

$$\begin{aligned} t_1 ds &= dx \\ t_2 ds &= dy \\ t_3 ds &= dz \end{aligned}$$

dove $\mathbf{t} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3$ è l'espressione in componenti del vettore tangente unitario alla curva. Dunque

$$\mathbf{F}^b = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = F_1 t_1\, ds + F_2 t_2\, ds + F_3 t_3\, ds = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds$$

e si ha la tesi. □

Riferimenti bibliografici

[1] Manfredo P. do Carmo, Differential Forms and Applications, Springer

[2] John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer

[3] Michael Spivak, Calculus on Manifolds, Benjamin/Cummings Publishing Company