Corso di Studi in Matematica

GEOMETRIA 2

Prova scritta del 12 febbraio 2020

COGNOME .... **NOME** ....

CORSO .... **Versione 1**

Esercizio 1. (7 punti) Siano X la retta reale dotata della topologia euclidea, e Y la retta reale dotata della topologia in cui gli aperti non banali sono le semirette $(a, +\infty)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Si consideri lo spazio topologico prodotto $Z = X \times Y$, e sia

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1 \text{ o } 2 < y < 4\} \\ &= (-1, 1) \times \big((-1, 1) \cup (2, 4)\big). \end{aligned}$$

1. Mostrare che A è connesso.
2. Determinare l'interno e la chiusura di A.
3. A è compatto? Giustificare la risposta.

Esercizio 2. (7 punti) In $\mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea, consideriamo il toro T ottenuto per rotazione attorno all'asse z della circonferenza di equazioni

$$x = 0, \ (y-2)^2 + z^2 = 1.$$

Sia inoltre D il disco unitario nel piano xy, e sia $X := T \cup D$.

1. Mostrare che D è un retratto di X, ma non è un retratto di deformazione.
2. Determinare un punto $p \in T$ e un cappio α in T con punto base p tale che la classe di α sia banale in $\Pi(X, p)$ ma non in $\Pi(T, p)$.

Esercizio 3. (5 punti) Sia S la superficie compatta che si ottiene identificando i lati di un poligono secondo la sequenza

$$W = g^{-1}\, a\, c^{-1}\, d\, f\, e\, b^{-1}\, d^{-1}\, c\, a^{-1}\, e^{-1}\, g\, f^{-1}\, b$$

Determinare la classe di omeomorfismo di S nella classificazione delle superfici, e determinare la sua caratteristica di Eulero.

Esercizio 4. (7 punti) Sia data la matrice $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Determinare la forma di Jordan $J \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ di A e il polinomio minimo di A.

(2) Mostrare che la matrice $A^2 + I$ è nilpotente.

(3) Esiste una matrice a coefficienti reali in forma di Jordan simile ad A?

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x, y) e la sua chiusura proiettiva $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\dfrac{\pi}{4}$ radianti in senso antiorario attorno all'origine.

(1) Si estenda f a una proiettività $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(2) Si trovino i punti fissi di F. Ci sono rette fisse per F?

(3) Si estenda F a $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e se ne trovino i punti fissi.