Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 3

Alberto Albano

In questa lezione vediamo la dimostrazione del **teorema fondamentale della teoria locale delle curve** (esistenza e unicità a meno di movimenti rigidi di una curva in $\mathbb{R}^3$ con curvatura e torsione assegnate).

La dimostrazione è sostanzialmente la stessa che c'è nel libro di do Carmo (Appendice al Capitolo 4), nel libro di Abate-Tovena (Teorema 1.3.37) e nel libro di Postnikov (Lecture 2, Theorem 1, pag. 47). La principale differenza è nel Passo 2 della dimostrazione del Teorema 1.2: i calcoli sono gli stessi, ma sono presentati in forma matriciale. Questo semplifica l'esposizione e dovrebbe migliorare (si spera) la comprensione.

Alla fine vedremo vari esempi di curve e di uso del Teorema Fondamentale.

1 Enunciato del teorema

Scopo di questo primo paragrafo è enunciare con precisione il teorema che vogliamo dimostrare. Come sempre *differenziabile* significa *di classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza, e siano $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ i campi vettoriali che costituiscono il triedro di Frenet. Le formule di Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & & k(s)\,\mathbf{n}(s) & \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s)\,\mathbf{t}(s) & & +\tau(s)\,\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & & -\tau(s)\,\mathbf{n}(s) & \end{cases}$$

esprimono le relazioni fra i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ e le loro derivate mediante due funzioni scalari, la *curvatura* $k(s)$ e la *torsione* $\tau(s)$ definite da

$$\begin{aligned} k(s) &= \|\mathbf{t}'(s)\| \\ \tau(s) &= -\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

Consideriamo la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

La matrice Q ha per *righe* i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$. Allora le formule di Frenet corrispondono all'uguaglianza di matrici

$$\frac{dQ}{ds} \cdot Q^t = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Infatti le *righe* di $\dfrac{dQ}{ds}$ sono $\mathbf{t}'$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{b}'$ mentre le *colonne* di Q^t sono $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Dunque il prodotto righe $\times$ colonne delle due matrici ha come elementi i prodotti scalari $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}$, $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$, $\dots$, $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}$ e poiché la base $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ è ortonormale, queste sono le componenti dei vettori $\mathbf{t}'$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{b}'$. Le formule di Frenet esprimono proprio queste componenti.

Il Teorema Fondamentale afferma che curvatura e torsione caratterizzano unicamente una curva, a meno di movimenti rigidi. Cominciamo dunque con il verificare che curvatura e torsione sono invarianti per traslazioni e rotazioni. La dimostrazione di questo fatto è lasciata per esercizio sia sul do Carmo (esercizio 1-5.6) che sull'Abate-Tovena (esercizio 1.25). Invece qui diamo la dimostrazione completa.

Proposizione 1.1. *Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza e sia $\alpha(s)$ la curva ottenuta da $\beta(s)$ mediante un movimento rigido dello spazio (composizione di traslazioni e rotazioni). Allora le curve α e β hanno la stessa curvatura e la stessa torsione.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v}$ un vettore fissato: traslare di $\mathbf{v}$ significa considerare $\alpha(s) = \beta(s) + \mathbf{v}$ e poiché le derivate di α e β sono uguali, i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ non cambiano e di conseguenza anche $k(s)$ e $\tau(s)$ sono le stesse.

Il caso delle rotazioni è più interessante. Sia M la matrice di una rotazione: M è ortogonale ($M^t = M^{-1}$) e $\det M = 1$. Possiamo scrivere $\alpha = M\beta$, la rotazione di β (immaginiamo i vettori α e β come vettori *colonna*). Allora i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ sono soggetti alla stessa rotazione, cioè

$$\mathbf{t}_\alpha = M\mathbf{t}_\beta, \quad \mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{n}_\beta, \quad \mathbf{b}_\alpha = M\mathbf{b}_\beta \tag{2}$$

Scriviamo questa relazione in forma matriciale come:

$$Q_\alpha = Q_\beta M^t$$

Infatti nella matrice Q mettiamo i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ in riga mentre i vettori che compaiono nella (2) sono vettori colonna.

Calcoliamo il membro sinistro della (1) ricordando che

- la matrice M è costante e quindi la sua derivata è la matrice nulla
- la matrice M è ortogonale e quindi la sua trasposta è uguale all'inversa

si ha:

$$\frac{dQ_\alpha}{ds} \cdot Q_\alpha^t = \frac{d(Q_\beta M^t)}{ds} \cdot (Q_\beta M^t)^t = \frac{dQ_\beta}{ds}(M^t M)Q_\beta^t = \frac{dQ_\beta}{ds} \cdot Q_\beta^t$$

Otteniamo dunque l'uguaglianza anche fra i membri destri della (1) e quindi curvatura e torsione non cambiano. $\square$

ATTENZIONE. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato l'ipotesi di ortogonalità, cioè $M^t = M^{-1}$ nel calcolo dell'ultima riga, ma l'ulteriore condizione $\det M = 1$, e cioè M è una *rotazione* e quindi non cambia l'orientamento non sembra essere stata usata.

In effetti, abbiamo usato questa ipotesi nel ricavare le relazioni (2). Facciamo in dettaglio tutti i passaggi per ottenere la (2). Così facendo otteniamo un'altra dimostrazione della Proposizione 1.1.

Sia M una matrice ortogonale (qualunque) e partiamo da $\alpha = M\beta$. Derivando si ha

- $\mathbf{t}_\alpha = \alpha' = (M\beta)' = M\beta' = M\mathbf{t}_\beta$
- $\mathbf{t}'_\alpha = M\mathbf{t}'_\beta \implies k_\alpha \mathbf{n}_\alpha = M(k_\beta \mathbf{n}_\beta)$

La prima è già una delle relazioni che vogliamo. Poiché M è ortogonale, la seconda ci dice che i vettori $k_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ e $k_\beta \mathbf{n}_\beta$ hanno la stessa norma e poiché i vettori normali sono entrambi di norma 1 e la curvatura è per definizione positiva si ottiene:

$$k_\alpha = k_\beta$$

e dividendo (la curva β è biregolare e quindi la curvatura è sempre diversa da 0)

$$\mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{n}_\beta$$

che è la seconda relazione. Osserviamo che questo ragionamento dimostra che la curvatura non cambia e quindi la curvatura è invariante per *tutte* le isometrie e non solo per movimenti rigidi. Per esempio, la simmetria rispetto ad un piano non cambia la curvatura di una curva.

Invece la torsione è sensibile ai cambiamenti di orientazione. Infatti, per definizione, il vettore binormale si ottiene come prodotto vettoriale del tangente e del normale e cioè la terna (tangente, normale, binormale) è una terna *positiva*. Calcolando i prodotti vettoriali, si ha

$$\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{t}_\alpha \wedge \mathbf{n}_\alpha = M\mathbf{t}_\beta \wedge M\mathbf{n}_\beta = \det(M)M\mathbf{b}_\beta$$

perché se la matrice M cambia l'orientazione (ha determinate -1), la terna $\{M\mathbf{t}_\beta, M\mathbf{n}_\beta, M\mathbf{b}_\beta\}$ è orientata *negativamente* mentre la terna $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ è orientata positivamente e poiché i primi due vettori di queste terne sono uguali, deve essere il terzo a cambiare segno.

Di conseguenza derivando si ha

$$\mathbf{b}'_\alpha = \det(M)M\mathbf{b}'_\beta$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha = -\mathbf{b}'_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha &= -\det(M)\, M\mathbf{b}'_\beta \cdot M\mathbf{n}_\alpha \\
&= -\det(M)\, \mathbf{b}'_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha \qquad \text{perché } M \text{ è ortogonale e lascia} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{invariato il prodotto scalare} \\
&= \det(M)\, \tau_\beta
\end{aligned}$$

In conclusione,

- M non cambia l'orientazione $\implies \det(M) = 1 \implies k_\alpha = k_\beta$ e $\tau_\alpha = \tau_\beta$
- M cambia l'orientazione $\implies \det(M) = -1 \implies k_\alpha = k_\beta$ e $\tau_\alpha = -\tau_\beta$

Il **teorema fondamentale della teoria locale delle curve** è il viceversa della Proposizione 1.1 e cioè è sempre possibile trovare una curva con curvatura e torsione assegnate in modo unico (a meno di traslazioni e rotazioni).

L'enunciato preciso che dimostreremo è (vedi Lezione 2):

Teorema 1.2 (**Teorema Fondamentale**). *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^\infty$, con $f(s) > 0$ per ogni $s \in I$ e supponiamo $0 \in I$.*

Per ogni $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e ogni base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ orientata positivamente esiste una e una sola curva $\beta(s)$ differenziabile, biregolare, parametrizzata per arcolunghezza e definita su tutto l'intervallo I tale che:

1. $k_\beta(s) = f(s)$, $\tau_\beta(s) = g(s)$
2. $\beta(0) = P_0$, $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$

L'ipotesi di positività per la base ortonormale significa che $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Questa ipotesi è chiaramente necessaria, perché il vettore binormale $\mathbf{b}$ è proprio definito come $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$.

Osserviamo anche che tutte le basi ortonormali che hanno matrice di passaggio con la base fissata con determinante positivo saranno orientate positivamente, mentre quelle con matrice di passaggio con determinante negativo saranno orientate negativamente.

La dimostrazione del Teorema 1.2 verrà data nel paragrafo seguente ed è basata in modo essenziale sul teorema di esistenza e unicità *globale* delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari. Enunciamo quindi con precisione la versione del teorema che useremo. Trovate questo enunciato (con la dimostrazione) sul Salsa-Pagani, Capitolo 4.2.1, pag. 242, enunciati iii) e iv) oppure sul Barutello-Conti-Ferrario-Terracini-Verzini, Teorema VIII.10, pag. 395.

Teorema 1.3. *Siano $\{a_{ij}(s)\}$ per $i, j = 1, \dots, n$ delle funzioni differenziabili sull'intervallo I e siano $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ numeri reali. Supponiamo anche $0 \in I$. Allora esiste ed è unica una famiglia di funzioni differenziabili $x_1(s), \dots, x_n(s)$ definite su tutto l'intervallo I tali che*

$$\begin{cases} x_1'(s) = a_{11}(s)x_1(s) + a_{12}(s)x_2(s) + \cdots + a_{1n}(s)x_n(s) \\ \quad \vdots \quad = \qquad\qquad \vdots \\ x_n'(s) = a_{n1}(s)x_1(s) + a_{n2}(s)x_2(s) + \cdots + a_{nn}(s)x_n(s) \end{cases}$$

e

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad \dots \quad x_n(0) = \bar{x}_n$$

2 La dimostrazione

La dimostrazione del teorema 1.2 si svolge in tre passi.

2.1 Passo 1: determinare il triedro

Per ipotesi abbiamo le due funzioni $f(s)$ e $g(s)$ e una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Scriviamo quindi tre "sistemi di Frenet" di equazioni differenziali per $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_i'(s) = & & f(s)\mathbf{n}_i(s) & \\ \mathbf{n}_i'(s) = -f(s)\mathbf{t}_i(s) & & & + g(s)\mathbf{b}_i(s) \\ \mathbf{b}_i'(s) = & & -g(s)\mathbf{n}_i(s) & \end{cases} \tag{3}$$

con condizioni iniziali $\mathbf{t}_i(0) = \mathbf{e}_{1i}$, $\mathbf{n}_i(0) = \mathbf{e}_{2i}$, $\mathbf{b}_i(0) = \mathbf{e}_{3i}$ dove $\mathbf{e}_{ij}$ è la componente j-esima del vettore $\mathbf{e}_i$.

Per il teorema 1.3, questi sistemi hanno una unica soluzione. Determiniamo in questo modo tre funzioni vettoriali $\mathbf{t}(s) = (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s))$, e analogamente per $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, che soddisfano le equazioni di Frenet e formano una base ortonormale per $s = 0$.

2.2 Passo 2: ortonormalità del triedro

Scriviamo come prima

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{bmatrix}$$

la matrice che ha per *righe* i vettori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$ trovati come soluzioni del sistema precedente e poniamo

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix}$$

dove $f(s)$ e $g(s)$ sono le funzioni nell'ipotesi del teorema. Il fatto che $Q(s)$ sia la soluzione del sistema di equazioni differenziali (3) significa che

$$\frac{dQ}{ds} = A(s) \cdot Q(s), \qquad \forall\, s$$

Consideriamo ora la funzione matriciale $\varphi(s) = Q^t(s) \cdot Q(s)$. Per $s = 0$ si ha $\varphi(0) = I_3$ poiché i tre vettori iniziali sono ortonormali. Derivando, si ha

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \left(\frac{dQ}{ds}\right)^t \cdot Q + Q^t \cdot \frac{dQ}{ds} \\ &= (AQ)^t \cdot Q + Q^t \cdot A \cdot Q \\ &= Q^t \cdot A^t \cdot Q + Q^t \cdot A \cdot Q \\ &= Q^t \cdot (A^t + A) \cdot Q \equiv 0 \end{aligned}$$

perché $A = -A^t$ è antisimmetrica. Poiché la funzione matriciale $\varphi(s)$ ha derivata indenticamente nulla (e il dominio è un intervallo) deve essere costante e quindi

$\varphi(s) = \varphi(0) = I_3$ per ogni $s \in I$. Questo significa che $Q^t(s) \cdot Q(s) = I_3$ per ogni $s \in I$ e cioè la matrice $Q(s)$ è ortogonale per ogni $s \in I$.

Dunque i vettori $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ formano sempre una base ortonormale. Osserviamo inoltre che $\det Q(s)$ è una funzione continua e può valere solo 1 o -1 perché $Q(s)$ è ortogonale. Poiché $\det Q(0) = 1$, in quanto la base iniziale è orientata positivamente, allora $\det Q(s)$ vale costantemente 1 (l'intervallo I è connesso!). Dunque le basi $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ sono tutte orientate positivamente.

2.3 Passo 3: la curva β

Dimostriamo adesso che il triedro $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ è il triedro di Frenet di una curva con la curvatura e torsione richiesta.

Integriamo la funzione vettoriale $\mathbf{t}(s)$ e poniamo

$$\beta(s) = P_0 + \int_0^s \mathbf{t}(u)\, du$$

Questa curva è quella cercata. Dimostriamo dunque che ha le proprietà volute. Denotiamo, per maggiore chiarezza, $\mathbf{t}_\beta$, $\mathbf{n}_\beta$, $\mathbf{b}_\beta$ i vettori del triedro di Frenet della curva $\beta(s)$ e $k_\beta(s)$ e $\tau_\beta(s)$ la sua curvatura e torsione.

Per prima cosa $\beta(0) = P_0 + \displaystyle\int_0^0 \mathbf{t}(u)\, du = P_0$.

Poiché $|\beta'(s)| = |\mathbf{t}(s)| = 1$ costantemente, la curva è parametrizzata per arcolunghezza e dunque $\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = \mathbf{t}(s)$.

La prima formula di Frenet per la curva β dice

$$\mathbf{t}'_\beta = k_\beta \mathbf{n}_\beta$$

D'altra parte, poiché $\mathbf{t}_\beta = \mathbf{t}$, per la prima equazione del sistema di cui $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ sono soluzione, si ha

$$\mathbf{t}'_\beta = \mathbf{t}' = f\mathbf{n}$$

Passando ai moduli si ha $\|\mathbf{t}'_\beta\| = f$ e poiché per ipotesi $f(s) > 0$, la parametrizzazione è biregolare e quindi il vettore normale $\mathbf{n}_\beta$ è sempre definito. Confrontando le due equazioni si ha

$$k_\beta(s) = f(s), \quad \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{n}(s) \qquad \text{per ogni } s \in I$$

Per costruzione del triedro di Frenet e per la positività della base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ si ha infine

$$\mathbf{b}_\beta(s) = \mathbf{t}_\beta(s) \wedge \mathbf{n}_\beta(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)$$

e dunque anche la torsione di β è quella richiesta:

$$\tau_\beta(s) = -\mathbf{b}_\beta(s)' \cdot \mathbf{n}_\beta(s) = -\mathbf{b}(s)' \cdot \mathbf{n}(s) = g(s)$$

In conclusione, la curva β ha per curvatura e torsione le funzioni assegnate, passa per il punto P_0 e per $s = 0$ ha triedro di Frenet assegnato e quindi soddisfa tutte le richieste dell'enunciato.

L'unicità è chiara: il triedro $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ è unico con le condizioni iniziali assegnate, e la curva β è unica perché è l'unica primitiva di $\mathbf{t}(s)$ che vale P_0 per $s = 0$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema. $\square$

3 Esempi

Esempio 3.1. CIRCONFERENZA. Sia $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, 0)$, dove $a > 0$ la parametrizzazione di una circonferenza di raggio a. La curva è biregolare e dalle formule della lezione scorsa si ottiene subito

$$k \equiv \frac{1}{a}, \qquad \tau \equiv 0$$

La circonferenza è una curva piana e quindi la torsione è identicamente nulla e dal calcolo si ottiene che anche la curvatura è costante, pari al reciproco del raggio.

Il teorema fondamentale allora dice: se α ha *torsione nulla* e *curvatura costante*, allora è una circonferenza o meglio, un arco di circonferenza, perché potrebbe essere di lunghezza inferiore a $2\pi a$

Esempio 3.2. ELICHE CIRCOLARI. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ e sia

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \qquad t \in \mathbb{R}$$

l'elica circolare (di asse l'asse z). Anche in questo caso il calcolo di curvatura e torsione è semplice e si ha:

$$k \equiv \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad \tau \equiv \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Anche in questo caso la curvatura e la torsione sono costanti e il teorema fondamentale implica: se α ha *curvatura e torsione costanti*, allora è un arco di elica circolare.

Osserviamo che da curvatura e torsione possiamo ricavare i valori di a e b:

$$k^2 + \tau^2 = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

e sostituendo si ha

$$a = \frac{k}{k^2 + \tau^2}, \qquad b = \frac{\tau}{k^2 + \tau^2}$$

Chiudiamo la lezione con un esercizio (Esercizio 2 del compito del 9 luglio 2019). Nella cartella di Moodle degli esami degli anni scorsi c'è il file con la soluzione. Provate a fare l'esercizio prima di guardare la soluzione.

Esercizio 3.3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata per arcolunghezza. L'*indicatrice delle tangenti* di α è la curva data dal versore tangente

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$$

Sia ora $\sigma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ un'elica circolare retta. Dimostrare che l'indicatrice delle tangenti di σ è una circonferenza con centro sull'asse z e calcolarne il raggio.
Suggerimento: non è necessario riparametrizzare $\sigma(t)$ per arcolunghezza