Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 6

Alberto Albano

1 Introduzione

In questa lezione cominciamo a studiare le superfici, cioè oggetti di dimensione 2. Avendo appena visto il caso delle curve, la prima idea è imitarne la definizione.

Purtroppo, per vari motivi questo non è possibile e dovremo seguire una strada diversa. Nel caso delle curve siamo partiti dalla definizione di *curva parametrizzata*. L'ipotesi di regolarità ci ha permesso di individuare una parametrizzazione particolare, quella per arcolunghezza e ogni curva regolare ammette una parametrizzazione di questo tipo. Questo ci ha consentito di studiare solo curve parametrizzate per arcolunghezza e la teoria (triedro di Frenet, curvatura, torsione) è particolarmente semplice e completa.

Una superficie parametrizzata sarebbe dunque una funzione $f : U \to \mathbb{R}^3$ differenziabile dove questa volta U è un aperto di $\mathbb{R}^2$. L'immagine dovrebbe essere il sostegno della superficie e cioè un sottoinsieme dello spazio.

La prima difficoltà nasce dal fatto che non è chiaro quale sia l'analogo dell'arcolunghezza. Su una superficie ci sono molte curve e non possiamo pensare di avere una parametrizzazione in due variabili che le parametrizzi tutte contemporaneamente per arcolunghezza. Ci viene quindi a mancare una parametrizzazione standard presente per tutte le superfici. Potremmo tentare qualcosa con l'*area* invece della lunghezza, ma si capisce presto che non è possibile definire una parametrizzazione standard su ogni superficie.

Ma il problema è ben più grave: pensiamo per esempio al caso della sfera (o del toro). Una parametrizzazione iniettiva dà un omeomorfismo fra il dominio e la sua immagine. Ma una sfera è compatta e quindi non può essere omeomorfa ad un aperto del piano.

Pensiamo a come abbiamo risolto questo problema per una curva: una circonferenza non è l'immagine di un intervallo aperto (stesso motivo di compattezza) ma si può ottenere come l'immagine di un intervallo chiuso (unendo gli estremi). In generale potremmo chiamare *curva* tutto ciò che ammette una parametrizzazione regolare, anche se non iniettiva o, meglio ancora, tale che ogni punto ha un intorno che ammette una parametrizzazione regolare iniettiva.

Si può dimostrare (non lo faremo) che una curva (connessa) in questo senso è molto semplice topologicamente. Ci sono solo due casi: se la curva è compatta allora è omeomorfa ad una circonferenza, se non è compatta è omeomorfa ad un intervallo aperto.

Per le superfici, dal teorema di classificazone visto a GEOMETRIA DUE, sappiamo che i tipi topologici sono molti di più (somme connesse di tori e piani proiettivi, oltre alla sfera) e quindi ci aspettiamo una complicazione maggiore nell'ottenere tutti questi casi da una sola semplice definizione.

Vedremo che l'idea accennata per le curve (ogni punto ha un intorno che ammette una parametrizzazione regolare iniettiva) è quella corretta. Per prima cosa è praticamente la definizione di superficie topologica vista a GEOMETRIA DUE e dobbiamo solo fare attenzione a mettere le giuste ipotesi di derivabilità per poter usare gli strumenti dell'Analisi Matematica.

Poiché però le parametrizzazioni saranno funzioni di due variabili, le derivate coinvolte saranno derivate parziali e il controllo delle derivate parziali sulla funzione non è così forte come il controllo della derivata su una funzione di una variabile (una parola sola: niente teorema di Lagrange).

Dunque dovremo scrivere con cure le condizioni di differenziabilità per avere una teoria soddisfacente. Per fortuna, queste ipotesi sono abbastanza naturali e sono verificate in tutti i casi di superfici che già conosciamo.

Precederemo quindi con la definizione di superficie regolare nel prossimo paragrafo. Dopo un esempio importante (la sfera) che vedremo in dettaglio, negli ultimi paragrafi vedremo due proposizioni che ci permetteranno di costruire molte superfici (ma non tutte).

2 La definizione di superficie regolare

Cominciamo con la definizione precisa di superficie regolare e subito dopo discuteremo in dettaglio il significato delle varie ipotesi.

Definizione 2.1. Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice *superficie regolare* se per ogni $P \in S$ esistono

- un intorno V di P in $\mathbb{R}^3$
- una funzione $\mathbf{x} : U \to V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$

dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un *aperto* e $\mathbf{x}$ è *suriettiva* tali che

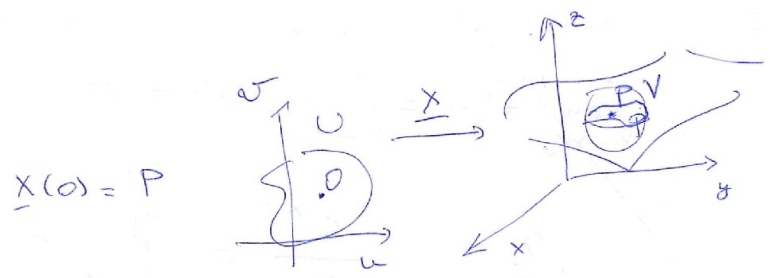
1. $\boxed{\text{la funzione } \mathbf{x} \text{ è } \textit{differenziabile}}$ e cioè, scrivendo in componenti la funzione

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

le componenti $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ hanno derivate parziali continue di ogni ordine

2. $\boxed{\text{la funzione } \mathbf{x} \text{ è un } \textit{omeomorfismo}}$

3. $\boxed{\text{il differenziale } d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ è iniettivo}}$ (e cioè ha rango massimo) per ogni $q \in U$



ATTENZIONE. Nei disegni, fatti a mano, le lettere sottolineate indicano vettori, quindi nel disegno precedente $\underline{x}$ è la stessa cosa della funzione vettoriale $\mathbf{x}$ che compare nella definizione.

La definizione è dunque di natura *locale*: una superficie S è un *sottoinsieme* dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$ tale che ogni suo punto ha un intorno che soddisfa certe condizioni. Introduciamo subito la terminologia che useremo per riferirci a queste funzioni e intorni.

- $\mathbf{x}$ si dice *parametrizzazione locale*
- $\mathbf{x}^{-1}$ si dice *carta locale*
- $V \cap S = \mathbf{x}(U)$ si dice *intorno coordinato*
- le componenti della funzione $\mathbf{x}^{-1}$ si dicono *coordinate locali*

La terminologia è di natura "geografica". Il primo esempio che vedremo sarà quello della sfera. Se pensiamo alla sfera come la superficie terrestre, molti dei nomi usati sono quelli soliti. Per esempio, $\mathbf{x}^{-1}$ associa ad ogni punto della superficie una *coppia di numeri* e cioè le sue coordinate. Nel caso di una carta geografica (= carta locale), queste sono la longitudine e latitudine.

Perciò, per verificare che un *sottoinsieme* S dello spazio ambiente $\mathbb{R}^3$ è una superficie, dobbiamo trovare una *famiglia* di parametrizzazioni locali tale che l'unione delle immagini della famiglia sia tutto S. Si dice che la famiglia di parametrizzazione *copre* la superficie S. Una tale famiglia viene anche detta *atlante* per ovvi motivi: un atlante è una famiglia di carte geografiche (i fogli dell'atlante) che coprono l'intera superficie terrestre (ogni punto della terra è in qualche foglio dell'atlante).

Leggiamo adesso con attenzione la definizione e vediamo il significato tutte le condizioni.

- *esiste un intorno V di P in* $\mathbb{R}^3$: possiamo supporre che V sia *aperto* perché per definizione dentro ogni intorno c'è un aperto che contiene il punto (e quindi è esso stesso un intorno). Non mettiamo "V aperto" nell'ipotesi ma quando sarà conveniente lo prenderemo aperto.
- *una funzione* $\mathbf{x} : U \to V \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$: come scritto nella condizione 1, possiamo pensare alla parametrizzazione locale come una funzione

$$\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$$

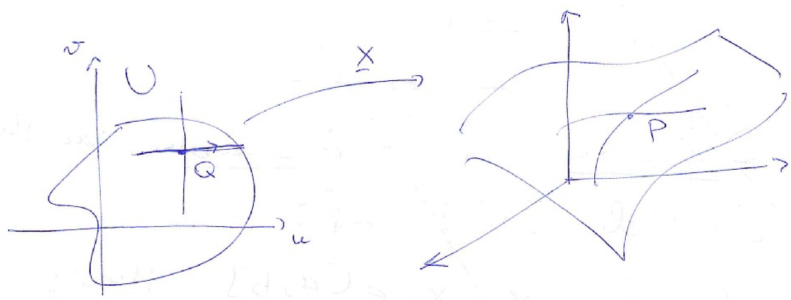
Il punto importante è che il *dominio* è un aperto del piano e l'*immagine* è contenuta in S. La ragione per avere il dominio aperto è per poter fare le derivate, come richiesto dalla successiva condizione 1. Poiché $S \in \mathbb{R}^3$, il sottoinsieme S è uno spazio topologico con la topologia indotta da $\mathbb{R}^3$. L'insieme $V \cap S$ è un intorno di P in S in questa topologia. Riprenderemo questo aspetto nella discussione della condizione 2.

- $\mathbf{x}$ *è suriettiva*: questo dice che $\mathbf{x}(U) = V \cap S$ e cioè l'immagine dell'aperto U è un intorno di P.
- *condizione* 1: questo è chiaro ed è uguale all'analoga ipotesi che abbiamo usato per le curve per dire che la parametrizzazione è differenziabile.
- *condizione* 2: questo è molto importante. Poiché dalle condizioni precedenti sappiamo già che $\mathbf{x}$ è continua e suriettiva, questa ipotesi significa che
  - $\mathbf{x}$ è iniettiva
  - l'inversa $\mathbf{x}^{-1}$ è continua

  quindi l'intorno $V \cap S$ è omeomorfo ad un disco del piano. Questa è l'ipotesi che dice che S è una *superficie* e cioè che la dimensione è 2.

  Questa condizione dice che una superficie regolare è una *varietà topologica di dimensione* 2, come definita nel corso di GEOMETRIA DUE: ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un disco aperto del piano. Notiamo che le ulteriori condizioni topologiche sono automatiche: infatti $\mathbb{R}^3$ è di Hausdorff e a base numerabile ed entrambe queste proprietà passano ai sottospazi.
- *condizione* 3: il differenziale $d\mathbf{x}_q$ è quello definito nel corso di ANALISI DUE, cioè l'applicazione lineare che ha per matrice, nelle basi canoniche, la matrice Jacobiana.

La condizione 3 è l'analogo della condizione di regolarità per le curve. Per capirla a fondo, scriviamo in dettaglio cosa significa, aiutandoci con un diagramma.



Siano $Q = (u_0, v_0)$ e $\mathbf{x}(Q) = P$. Il differenziale di $\mathbf{x}$ porta il vettore tangente ad una curva in U nel vettore tangente alla curva immagine mediante $\mathbf{x}$. Per il punto Q passano molte curve ma ci concentriamo su due in particolare, le rette orizzontali e verticali per Q.

La retta orizzontale è parametrizzata da $\alpha_{\mathrm{or}}(u) = (u, v_0)$ e il suo vettore tangente in Q è $\mathbf{t}_{\mathrm{or}} = (1, 0)$. La parametrizzazione della curva immagine si ottiene componendo: $\beta_{\mathrm{or}}(u) = (\mathbf{x} \circ \alpha_{\mathrm{or}})(u)$ e cioè

$$\beta_{\mathrm{or}}(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)$$

e il vettore tangente si ottiende derivando il parametro u (notiamo che la parametrizzazione non è necessariamente per arcolunghezza, quindi il vettore che troviamo può non avere norma 1) e calcolando in $P = \mathbf{x}(Q)$:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

In modo analogo, la retta verticale ha equazione parametrica $\alpha_{\mathrm{ver}}(v) = (u_0, v)$ e vettore tangente in Q dato da $\mathbf{t}_{\mathrm{ver}} = (0, 1)$: il vettore tangente alla curva immagine $\beta_{\mathrm{ver}}(v) = (\mathbf{x} \circ \alpha_{\mathrm{ver}})(v)$ è quindi

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

La base $\{\mathbf{t}_{\mathrm{or}}, \mathbf{t}_{\mathrm{ver}}\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e usando questa base in partenza e la base canonica di $\mathbb{R}^3$ in arrivo, la matrice del differenziale di $\mathbf{x}$ nel punto Q è la matrice Jacobiana:

$$d\mathbf{x}_Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(Q) & \frac{\partial x}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(Q) & \frac{\partial y}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(Q) & \frac{\partial z}{\partial v}(Q) \end{bmatrix}$$

e dunque la condizione 3 significa

$$\boxed{\text{i vettori } \mathbf{x}_u(Q) \text{ e } \mathbf{x}_v(Q) \text{ sono linearmente indipendenti per ogni } Q \in U}$$

o in modo equivalente

$$\boxed{\mathbf{x}_u(Q) \wedge \mathbf{x}_v(Q) \neq 0 \qquad \text{per ogni } Q \in U}$$

e in particolare i vettori $\mathbf{x}_u(Q)$ e $\mathbf{x}_v(Q)$ sono entrambi non nulli.

Nel piano, le rette orizzontali e verticali passanti per Q sono perpendicolari. Quando guardiamo le immagini di queste rette su S, otteniamo due curve *regolari* (perché i vettori tangenti sono non nulli) che passano per P con *direzioni diverse*: i due vettori tangenti non sono paralleli, anche se non è detto che siano perpendicolari. Queste curve sono dette *curve coordinate*. Per ogni punto P della superficie passa una coppia di curve coordinate, le immagini delle rette orizzontali e verticali passanti per la controimmagine $\mathbf{x}^{-1}(P) = Q \in U$.

Ricordiamo che per una curva l'ipotesi che la parametrizzazione $\alpha(t)$ sia regolare significa che il vettore tangente è diverso da 0. Questo dice che il differenziale $d\alpha_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è una funzione lineare non nulla e quindi iniettiva. Infatti, una funzione lineare non nulla ha immagine di dimensione almeno 1 e quindi il nucleo ha dimensione al massimo la dimensione del dominio meno 1. Poiché nel caso di una curva il dominio è uno spazio vettoriale di dimensione 1 allora il nucleo ha dimensione al più 0: il nucleo ha quindi dimensione 0 e cioè è banale e la funzione è iniettiva.

Invece, per una funzione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, essere non nulla implica solo che il nucleo ha dimensione al massimo 1 ma potrebbe essere non banale. Quindi la condizione "differenziale iniettivo" in questo caso è più forte che "differenziale non nullo".

3 Esempio: la sfera

Il primo esempio che studiamo in dettaglio è la sfera di centro l'origine e raggio 1, cioè poniamo

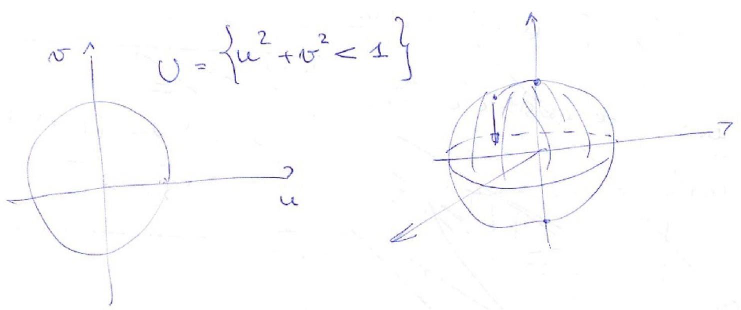
$$S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Da quello che vedremo sarà chiaro che le cose saranno identiche per un qualunque centro e raggio, con le semplici modifiche opportune.

Abbiamo già osservato nell'introduzione che non è possibile descrive tutta la sfera con una sola parametrizzazione. Infatti, se $\mathbf{x} : U \to S^2$ fosse suriettiva, la condizione 2 direbbe che $\mathbf{x}$ è un omeomorfismo e questo è falso perché la sfera è compatta e un aperto del piano non può essere compatto. Se anche ammettessimo domini più generali, per esempio un disco chiuso (dovremmo definire le derivate anche sul bordo, ma per ora non occupiamoci di questo problema), avremmo ancora un omeomorfismo, ma di nuovo è impossibile: il disco è contraibile, la sfera no.

Questo è il tipico esempio del fenomeno descritto nell'introduzione: ci sono motivi *topologici* che impediscono di definire le superfici semplicemente come superfici parametrizzate.

Cominciamo quindi a trovare una parametrizzazione "parziale", che copre cioè solo una parte della sfera.



Sul dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ come nel disegno, definiamo

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$

cioè stiamo semplicemente scrivendo $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Verifichiamo le 3 condizioni:

① è chiaro che la funzione $\mathbf{x}_1$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$. Infatti la radice quadrata è infinitamente differenziabile nei punti in cui l'argomento è strettamente maggiore di 0, come capita nel dominio U.

② $\mathbf{x}$ è iniettiva (ovvio, le prime due componenti danno l'iniettività) e poiché l'immagine non è nient'altro che il grafico della funzione $f(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$ e cioè l'emisfero nord *aperto*, la funzione inversa è la proiezione sul piano xy e quindi è continua (la proiezione è sempre una funzione continua).

③ I vettori delle derivate parziali

$$(\mathbf{x}_1)_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{x}_1)_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

sono sempre linearmente indipendenti. Con $*$ indichiamo le derivate parziali della terza componente, che non interessano (e NON calcoliamo) perché l'indipendenza lineare è già garantita dalle derivate parziali delle prime due componenti.

Questa parametrizzazione mostra che tutti i punti dell'emisfero superiore aperto soddisfano la condizione di superficie regolare. Usando la parametrizzazione

$$\mathbf{x}_1(u,v) = \left(u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

con lo stesso dominio U copriamo l'emisfero inferiore e quindi le condizioni sono soddisfatte per tutti i punti della sfera tranne l'equatore.

Basta allora usare le altre 4 semisfere ottenute dividendo la sfera con i piani xz e yz per ottenere 6 parametrizzazioni locali che coprono l'intera sfera.

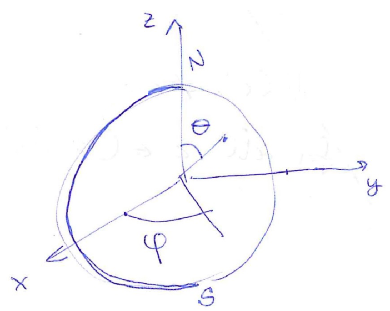
Esercizio 3.1. Scrivere le rimanenti 4 parametrizzazioni. (Suggerimento: il dominio U è lo stesso per tutte).

Possiamo coprire la sfera con un altro sistema di parametrizzazioni: le *coordinate polari.* Usiamo il dominio

$$U = \{(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi\}$$

U è un rettangolo aperto e la parametrizzazione è:

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta)$$



L'immagine è la sfera tranne un meridiano, dato da $\varphi = 0$. Anche i poli non sono compresi nell'immagine.

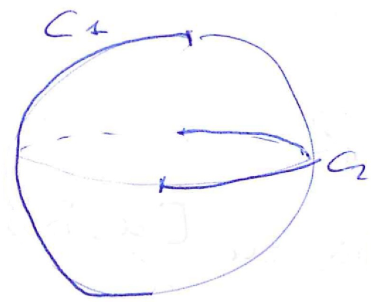
È chiaro che $\mathbf{x}$ è differenziabile $\big($condizione ①$\big)$. Le derivate parziali sono:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3.2. Calcolare i tre determinanti 2×2 e verificare che non si annullano mai tutti e tre contemporaneamente sul dominio U.

Dall'esercizio abbiamo dunque la condizione ③. È semplice vedere che $\mathbf{x}$ è biunivoca dal rettangolo U alla sfera meno il meridiano (Esercizio!). È invece molto meno evidente che $\mathbf{x}^{-1}$ sia continua e la dimostrazione richiede scrivere con cura le funzioni trigonomentriche inverse e usare la loro continuità. Non facciamo qui questo calcolo perché vedremo nella prossima lezione un teorema che garantisce che sotto ipotesi opportune (qui verificate) la funzione $\mathbf{x}^{-1}$ è continua.

Ruotando adesso le funzioni (cioè scambiando le componenti nella parametrizzazione $\mathbf{x}$ e cambiando anche la fase) si può coprire la sfera tranne metà equatore (vedi figura). Queste due parametrizzazioni insieme coprono la sfera.



Poiché sappiamo che non si può coprire la sfera con una sola parametrizzazione, questo è il numero minimo possibile.

È possibile coprire la sfera con due parametrizzazioni (diverse) anche tramite la proiezione stereografica,

Esercizio 3.3. Svolgere l'esercizio 16 a pag. 69 del do Cramo, dove è descritta la costruzione geometrica e sono scritte le equazioni della proiezione stereografica.

Vedremo nelle prossime lezioni altri esempi interessanti di superfici. Però come mostra il caso semplice della sfera, trovare parametrizzazioni e dimostrare che tutte le condizioni sono soddisfatte è piuttosto laborioso. Passiamo allora a dimostrare alcune proposizioni che garantiscono che in certe situazioni, abbiamo una superficie regolare.

4 Grafico di una funzione

In questo paragrafo dimostriamo la prima proposizione generale di teoria delle superfici. Questa proposizione tratta il caso "parametrico".

Proposizione 4.1. *Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$, dove $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto. Allora il grafico di f è una superficie regolare:*

$$S = \Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

Dimostrazione. In questo caso basta una sola parametrizzazione per coprire tutta la superficie S. La dimostrazione è la stessa che abbiamo fatto per la prima parametrizzazione della sfera. Scriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U &\longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

Le verifiche della condizione ① e della condizione ③ sono immediate. La condizione ② è anche soddisfatta perché l'inversa $\mathbf{x}^{-1} : S \to U$ è la proiezione sul piano xy.

Notiamo che questo dice che il dominio U e il grafico S sono omeomorfi. Questo è ben noto (e ovvio). □

Ricordiamo questa proposizione come:

Proposizione 1. Il grafico di una funzione differenziabile è una superficie regolare.

5 Un richiamo di Analisi Matematica

Nel seguito useremo spesso due importanti teoremi di Analisi sulle funzioni di più variabili. Per comodità riportiamo qui gli enunciati. Per tutti i dettagli e le dimostrazioni, si può vedere un qualunque libro di Analisi. In particolare, trovate questi teoremi nel Capitolo VII del libro V. Barutello, M. Conti, D. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, *Analisi Matematica, Vol. 2*, Apogeo, che avete usato nel corso di ANALISI DUE. Questi teoremi sono nel programa del corso di ANALISI DUE e perciò li considereremo noti.

(VII.63) Teorema di Dini per sistemi. *Sia $\mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, con A aperto, una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e sia $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ tale che*

1. $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$
2. $\det D_{\mathbf{y}}\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$

allora esistono $\delta > 0$, $\sigma > 0$ e una funzione $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ definita in $I = B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in $J = B_\sigma(\mathbf{y}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

- $\mathbf{y}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0)$
- $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ *in* $I \times J \iff \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$
- *la funzione φ è di classe $\mathcal{C}^1$*

Riportiamo qui il seguente testo dal BCFTV, a pagina 369, che spiega esattamente l'uso che faremo di questo teorema.

(VII.64) Osservazione. Il Teorema di Dini viene spesso utilizzato nel modo seguente. Consideriamo ancora $\mathbf{G} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ di classe $\mathcal{C}^1$ e un punto $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+m}) \in A$ tale che $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Se sappiamo che il rango della matrice jacobiana $J_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})$ è massimo (cioè uguale a m), allora, grazie al Teorema (IV.64) deduciamo l'esistenza di una sottomatrice di $J_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})$, quadrata di ordine m, il cui determinante è non nullo. Ciò significa che è possibile individuare m variabili che soddisfano l'ipotesi 2 del teorema. Quindi, se il rango di $J_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}})$ è massimo, m variabili risultano esplicitabili in funzione delle restanti n in un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$.

Enunciamo ancora il Teorema di inversione locale, che dà le condizioni affinché una funzione differenziabile ammetta inversa ancora differenziabile. Questa è la generalizzazione al caso delle funzioni di più variabili della formula per la derivata della funzione inversa.

Teorema di inversione locale. *Siano* $\mathbf{h} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, con* A *aperto, una funzione di classe* $\mathcal{C}^1$ *e sia* $\mathbf{x}_0 \in A$*. Sia* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ *l'immagine di* $\mathbf{x}_0$ *attraverso* $\mathbf{h}$ *e supponiamo che*

$$\det J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

Allora esistono $\delta, \sigma > 0$ *e una unica funzione* φ *tali che*

- $\mathbf{h}(B_\delta(\mathbf{x}_0)) = B_\sigma(\mathbf{y}_0)$
- $\varphi : B_\sigma(\mathbf{y}_0) \to B_\delta(\mathbf{x}_0)$ *è di classe* $\mathcal{C}^1$ *in* $B_\sigma(\mathbf{y}_0)$
- $\varphi(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ *e* $\mathbf{h}(\varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$ $\forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{y} \in B_\sigma(\mathbf{y}_0)$
- $J_\varphi(\mathbf{y}_0) = (J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0))^{-1}$

Per concludere, osserviamo che le ipotesi di questi teoremi richiedono che le funzioni date siano di classe $\mathcal{C}^1$ e le conclusioni danno l'esistenza di altre funzioni, sempre di classe $\mathcal{C}^1$. Questo perché di solito in Analisi si cerca di usare ipotesi minime di differenziabilità per avere teoremi di vasta applicazione.

Analizzando le dimostrazioni è però immediato osservare che se le funzioni nelle ipotesi sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ allora anche le funzioni che si ottengono sono di classe $\mathcal{C}^\infty$. La dimostrazione di questa affermazione segue da un ragionamento simile a quello fatto nella Proposizione 3.2 della Lezione 1, anzi è proprio lo stesso: per avere la derivata di un certo ordine occorre che la funzione di partenza abbia derivate di quell'ordine e certe quantità siano diverse da 0. Le ipotesi contengono la condizione "diverso da 0" e quindi, aumentando l'ordine di derivabilità delle funzioni in ipotesi, si ottengono le corrispondenti proprietà di derivibilità nella tesi.

Notiamo ancora che in molti libri, specialmente in inglese, il Teorema di Dini viene chiamato *Implicit Function Theorem* e cioè Teorema della funzione implicita, che descrive esattamente il suo contenuto.

6 Superfici di livello

Trattiamo ora il caso "cartesiano" e cioè un sottoinsieme dello spazio dato come luogo di zeri di una funzione. Ricordiamo alcune definizioni..

Definizione 6.1. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile e sia $p \in \mathbb{R}^n$.

- p è un *punto critico* se il differenziale $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non è suriettivo
- se p è un punto critico allora $f(p) \in \mathbb{R}^m$ è detto *valore critico*
- se $a \in \mathbb{R}^m$ non è un valore critico si dice che a è un *valore regolare*

Osserviamo che con questa definizione, se a non è nell'immagine di f allora è automaticamente un valore regolare. Questo è corretto, anche se a noi interesseranno solo valori regolari che appartengono all'immagine della funzione.

L'unico caso che consideriamo è quello di una funzione

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

In questo caso il differenziale in un punto $p \in U$ è data da una matrice Jacobiana di tipo $(1, 3)$

$$df_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$$

e poiché il codominio del differenziale ha dimensione 1, l'unico modo per essere non suriettivo è essere nullo. Dunque

$$\boxed{p \text{ critico} \iff f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0}$$

La proposizione che vogliamo è una conseguenza immediata del Teorema di Dini, usando il ragionamento fatto nell'Osservazione VII.64.

Proposizione 6.2. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile e sia $a \in f(U)$ un valore regolare. Allora la controimmagine $f^{-1}(a)$ è una superficie regolare.*

La superficie $f^{-1}(a)$ è la *superficie di livello a*. Scrivendo la funzione $g = f - f(a)$ si ha che $g^{-1}(0) = f^{-1}(a)$ e quindi la superficie regolare è descritta come il luogo di zeri di g.

Tipici esempi di applicazioni di questo teorema sono le quadriche non singolari, che sono tutte date come il luogo di zeri di una funzione che ha 0 come valore regolare. Per esempio, ellissoidi, iperboloidi, ..., sono tutte superfici regolari.

Dimostrazione. Poniamo $S = f^{-1}(a)$. Per dimostrare che S è una superficie regolare dobbiamo trovare una parametrizzazione locale per ogni punto $p \in S$.

Fissiamo dunque $p \in S$. Poiché a è un valore regolare, il punto p non è un punto critico e quindi almeno una delle tre derivate parziali è diversa da 0. A meno di rinominare le variabili, possiamo supporre

$$f_z(p) \neq 0$$

Siamo esattamente nelle condizioni del Teorema di Dini, con $n = 2$ e $m = 1$: poiché il determinante Jacobiano rispetto alla variabile z è diverso da 0, possiamo esplicitare z in funzione di x, y con una funzione differenziabile in un intorno di p. Scriviamo questa funzione

$$z = \varphi(x, y)$$

Dal Teorema di Dini si ha che (con le notazioni attuali)

$$f(x, y, z) = a \iff z = \varphi(x, y)$$

Dunque, in un intorno di p la superficie di livello a è il grafico della funzione differenziabile φ e dunque, per la Proposizione 1, è una superficie regolare. □

Osservazione. Sul do Carmo la dimostrazione di questa proposizione sembra (molto) più complicata perché è fatta senza citare il Teorema di Dini, ma ridimostrandolo in questo caso particolare come conseguenza del Teorema di inversione locale.

In effetti i due teoremi, Dini e Inversione Locale sono equivalenti e la scelta di quale dimostrare dipende dai gusti dell'autore. Sul BCFTV viene dimostrato il teorema di Dini e poi viene dedotto come conseguenza il teorema di inversione locale (BCFTV, Esercizio 43 a pag. 386).

do Carmo invece rimanda ad un libro di Analisi (R. C. Buck, Advanced Calculus) in cui prima si dimostra il teorema di inversione locale e da questo si deduce il teorema della funzione implicita. In effetti sul do Carmo i fatti fondamentali di Analisi sono raccolti nell'Appendice al Capitolo 2 da pag. 120 a pag. 135. Viene citato solo il teorema di inversione locale, con il riferimento al libro di Buck per una dimostrazione. Non c'è bisogno di leggere questa appendice perché tutti gli argomenti trattati sono stati fatti nei corsi di ANALISI UNO e ANALISI DUE.

Ricordiamo questa proposizione come:

Proposizione 2. La superficie di livello di un valore regolare è una superficie regolare.