UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

CORSO DI STUDI IN MATEMATICA

GEOMETRIA 3 – A.A. 2019/20

Lezione 7

Alberto Albano

In questa lezione completiamo l'analisi della definizione di superficie regolare, dimostrando due importanti proposizioni che si utilizzano in continuazione.

Affronteremo poi il problema di definire il concetto di *funzione differenziabile* con dominio una superficie. Il problema centrale è che il dominio non è un aperto di $\mathbb{R}^3$ (anzi, spesso è un chiuso) e quindi dobbiamo rivedere la definizione usuale e adattarla alla nuova situazione.

Nella prossima lezione definiremo e studieremo il *differenziale* di una funzione differenziabile. A quel punto avremo a disposizione tutti gli strumenti usuali dell'Analisi Matematica e potremo utilizzarli per intraprendere lo studio della geometria delle superfici.

Continuiamo a seguire il percorso del do Carmo, fine del Capitolo 2-2 e Capitolo 2-3.

1 Superfici regolari come grafici locali

La Proposizione 1 della Lezione 6 dice che ogni grafico è una superfici regolare. Naturalmente il viceversa non può essere vero: basta pensare alla superficie della sfera che non è il grafico di nessuna funzione di due variabili. Però la prima descrizione della sfera come superficie regolare si ottiene proprio rappresentando la sfera come l'unione di grafici di funzioni, le 6 parametrizzazioni del tipo $\left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$.

Dunque una sfera è "localmente" un grafico, anche se non globalmente. La prossima proposizione dice che questo è vero per ogni superficie.

Proposizione 1.1. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Allora esiste un intorno $V \subseteq S$ di p in S tale che V è il grafico di una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ di una delle seguenti forme*

$$z = f(x, y) \qquad \textit{oppure} \qquad y = g(x, z) \qquad \textit{oppure} \qquad x = h(y, z)$$

L'enunciato dice quindi di più: è sempre possibile proiettare una superficie su uno dei tre piani coordinati e ottenere il grafico di una funzione.

Dimostrazione. Per $p \in S$, scegliamo un intorno coordinato e una parametrizzazione regolare $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$, dove

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

e sia $p = \mathbf{x}(q)$. Poiché la parametrizzazione $\mathbf{x}$ è regolare, uno dei tre determinanti della matrice Jacobiana è diverso da 0 in $q \in U$:

$$d\mathbf{x}_q = \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{bmatrix}$$

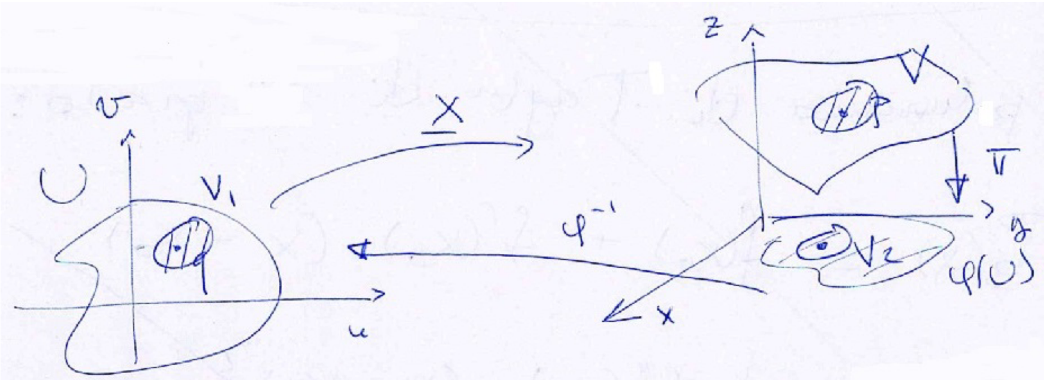
e possiamo supporre che sia

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u(q)y_v(q) - x_v(q)y_u(q) \neq 0$$

Sia allora $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione $\pi(x,y,z) = (x,y)$ e sia

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longmapsto (x(u,v), y(u,v)) \end{aligned}$$

e cioè $\varphi = \pi \circ \mathbf{x}$ (vedi figura).



Calcolando il differenziale di φ si ha

$$d\varphi_q = \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{bmatrix}$$

e quindi, per il teorema della funzione inversa, esiste una funzione inversa differenziabile $\varphi^{-1} : V_2 \to V_1$ dove V_2 è un intorno di $\varphi(q) = \pi(p)$ e V_1 è un intorno di q.

Poiché $\mathbf{x}$ è un *omeomorfismo* (dalla definizione di parametrizzazione regolare), l'immagine $V = \mathbf{x}(V_1)$ è un intorno di p. Basta allora porre

$$f(x,y) = \left(z \circ \varphi^{-1}\right) : V_2 \to \mathbb{R}$$

e l'intorno V di p dentro la superficie S è il grafico della funzione $z = f(x,y)$. $\square$

Anche questa volta, ricordiamo la proposizione come:

Proposizione 3. Una superficie regolare è localmente un grafico.

Dunque per questioni di carattere locale, basta trattare il caso dei grafici di funzione. Non sarà così per questioni di natura globale, come l'orientazione.

Notiamo anche che se la superficie è data in forma cartesiana (superficie di livello di un valore regolare), questa proposizione è semplicemente il teorema di Dini.

Un altro modo di capire la Proposizione 3 è che, data una *qualunque* parametrizzazione regolare, possiamo ottenerne un'altra del tipo "grafico", scegliendo in modo opportuno il sistema di coordinate e anzi, almeno uno dei piani coordinati del sistema originale va già bene come dominio per le variabili indipendenti.

Concludiamo questa parte introduttiva sulle superfici con una proprietà già annunciata nella scorsa lezione: a volte, per dimostrare che una parametrizzazione è regolare, basta verificare solo le condizioni ① e ③.

Proposizione 1.2. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Sia*

$$\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

con $p \in \mathbf{x}(U)$ e $\mathbf{x}$ soddisfa le condizioni ① e ③ della definizione di parametrizzazione.

Supponiamo che $\mathbf{x}$ sia iniettiva. Allora $\mathbf{x}^{-1}$ è continua.

Dunque, *se sappiamo già* che S è una superficie regolare, allora la condizione più delicata per essere parametrizzazione regolare è in realtà conseguenza delle altre ipotesi.

Per esempio, poiché la sfera è una superficie regolare (come abbiamo dimostrato usando le parametrizzazioni tipo "grafico"), allora le coordinate polari sono parametrizzazioni locali: la continuità dell'inversa è automatica.

Notiamo che NON è vero che la condizione ② è sovrabbondante. Solo se abbiamo già dimostrato che S è una superficie regolare possiamo controllare che un'altra funzione sia una parametrizzazione locale verificando per essa solo le condizioni ① e ③.

Dimostrazione. Facciamo riferimento alla figura della dimostrazione precedente e usiamo le stesse notazioni. Sia

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

la funzione che stiamo considerando. La funzione $\mathbf{x}$ è differenziabile per la condizione ① e il rango della matrice Jacobiana 2 per la condizione ③. Possiamo supporre che sia

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u(q)y_v(q) - x_v(q)y_u(q) \neq 0$$

Sia allora $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione $\pi(x, y, z) = (x, y)$ e sia $\varphi = \pi \circ \mathbf{x}$.

Come prima,

$$\det(d\varphi_q) = \det \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{bmatrix} \neq 0$$

e quindi, per il teorema della funzione inversa, esiste una funzione inversa differenziabile $\varphi^{-1} : V_2 \to V_1$ dove V_2 è un intorno di $\varphi(q) = \pi(p)$ e V_1 è un intorno di q.

Dunque $\varphi : V_2 \to V_1$ è un *omeomorfismo*. Se $\mathbf{x}$ è iniettiva e poniamo $V = \mathbf{x}(V_1)$ allora su V esiste l'inversa

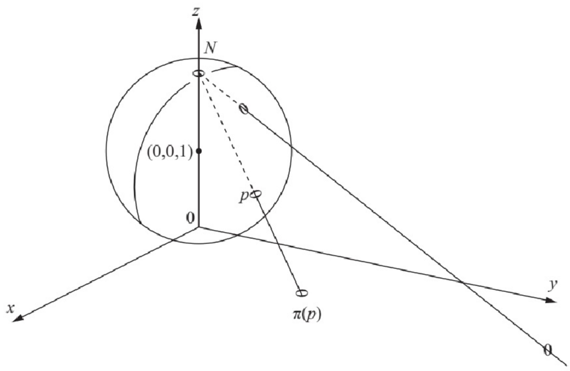
$$\mathbf{x}^{-1} : V \to V_1$$

e su questo dominio

$$\mathbf{x}^{-1} = \varphi^{-1} \circ \pi = (\pi \circ \mathbf{x})^{-1} \circ \pi$$

Poiché sia π che φ^{-1} sono continue, concludiamo che $\mathbf{x}^{-1}$ è continua. □

Esempio 1.3. ***La proiezione stereografica.***
Questo esercizio (do Carmo, esercizio 16 a pag. 69) era stato assegnato la scorsa lezione, vediamo in dettaglio la risoluzione.



Questa è l'illustrazione del do Carmo. Come descritto, la mappa che dobbiamo scrivere è un sistema di coordinate sulla sfera meno il polo nord

$$\pi : S^2 - N \to \mathbb{R}^2$$

ottenuta proiettando ogni punto p della sfera sul punto $\pi(p)$ che si ottiene intersecando la retta Np con il piano xy. L'inversa di questa mappa è una paramentrizzazione locale, che manda l'aperto $U = \mathbb{R}^2$ sulla sfera meno un punto. È chiaro che l'analoga proiezione dal polo sud dà una seconda carta locale e le due insieme danno la struttura di superficie regolare su S^2.

Per qualche motivo, do Carmo mette la sfera appoggiata sul piano xy mentre per ragioni di simmetria è meglio mettere la sfera con il centro nell'origine e proiettare sempre sul piano xy.

Quindi la mappa che scriveremo non è la stessa che trovate sul do Carmo. Provate a posizionare la sfera come il do Carmo e verificate che la risposta di pag. 69 è corretta.

Per il resto di questo esempio scriviamo:

$$S^2 = \text{ sfera di centro } O \text{ e raggio } 1 \ = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

Il polo nord è $N = (0, 0, 1)$. Scriviamo direttamente la mappa inversa π^{-1} e sia quindi $q = (u, v, 0)$ un punto del piano $z = 0$. Dobbiamo

1. tracciare la retta Nq
2. intersecare la retta con la sfera

Il punto di intersezione sarà $\pi^{-1}(q)$. Scritta la mappa, verificheremo le condizioni per un parametrizzazione locale. Poiché dobbiamo intersecare due oggetti (retta e sfera) è bene averne uno in forma parametrica e l'altro in forma cartesiana. La sfera è già data in forma cartesiana e quindi scriviamo la retta in forma parametrica, usando il parametro reale t.

L'equazione della retta (in forma vettoriale) è: $\ell : N + t(q - N)$ e cioè:

$$\ell : \begin{cases} x = 0 & + tu \\ y = 0 & + tv \\ z = 1 & - t \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della sfera si ha

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1$$

da cui si ricavano le due soluzioni: $t = 0$ (che corrisponde al polo nord) e

$$t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$$

Sostituiamo adesso nelle equazioni parametriche della retta per trovare il punto di intersezione. Si ottiene

$$p = \pi^{-1}(q) = \mathbf{x}_N(u,v) = \begin{cases} x = \dfrac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \dfrac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$$

La mappa $\mathbf{x}_N$ è chiaramente di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$ $\big($condizione 1$\big)$. Dopo aver calcolato le derivate parziali e la matrice Jacobiana (esercizio!!), si trova che i tre minori 2×2 hanno determinante

$$J_{xy} = -4\frac{u^2+v^2-1}{(u^2+v^2+1)^3}, \qquad J_{xz} = 8\frac{v}{(u^2+v^2+1)^3}, \qquad J_{yz} = -8\frac{u}{(u^2+v^2+1)^3}$$

Si ha $J_{xz} = J_{yz} = 0 \iff u = v = 0$ e in questo punto $J_{xy} \neq 0$. Dunque almeno uno dei determinanti è sempre diverso da zero e quindi il rango è 2 $\big($condizione 3$\big)$.

Dalla descrizione geometrica è chiaro che la funzione $\mathbf{x}_N$ è iniettiva e quindi per la Proposizione 1.2 l'inversa è continua ed è soddisfatta anche la condizione 2.

Esercizio 1.4. Scrivere l'analoga mappa $\mathbf{x}_S$ proiettando dal polo sud. Inoltre:

- Per entrambe le proiezioni, i punti sulla circonferenza unitaria nel piano xy (l'equatore) sono punti fissi.
- La proiezione dal polo nord manda l'interno del disco unitario nell'emisfero sud e l'esterno nell'emisfero nord (tranne il polo nord, ovviamente)
- La proiezione dal polo sud scambia interno ed esterno nella frase precedente.

2 Funzioni differenziabili

Vogliamo ora definire il concetto di *funzione differenziabile* con dominio una superficie regolare. Sia dunque $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una funzione regolare e sia

$$f : S \to \mathbb{R}$$

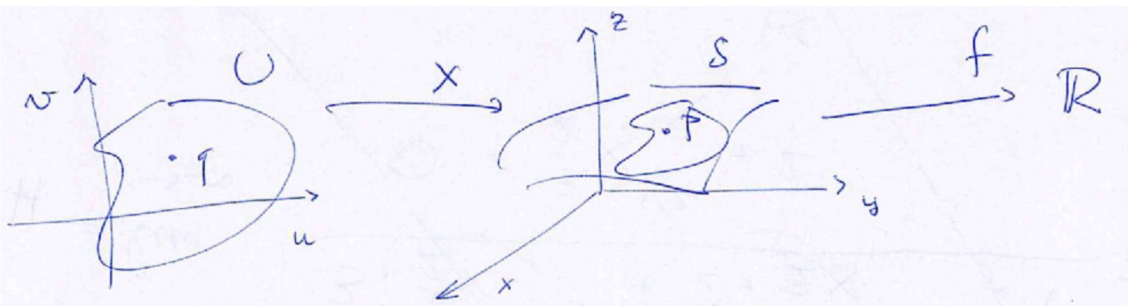
una funzione. Cominciamo con il caso di funzioni a valori scalari. Per funzioni a valori vettoriali andrà bene la stessa definizione applicata a tutte le componenti scalari della funzione.

Per prima cosa, f deve essere continua: questo non è un problema perché S è uno spazio topologico come sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e quindi sappiamo cosa vuol dire essere continua.

Cosa vuol dire differenziabile? Anche se stiamo solo cercando di definire le *derivate parziali* abbiamo comunque bisogno di un intorno del punto in cui deriviamo e dentro una superficie non ci può essere nessun aperto di $\mathbb{R}^3$. Cercate di capire bene questo punto, che è certamente molto intuitivo.

Inoltre, una superficie è un oggetto di dimensione due e quindi dovremmo poter fare *due* derivate parziali e non tre. Vogliamo quindi descrivere delle variabili indipendenti sulla superficie e fare le derivate rispetto a queste. Abbiamo già visto le *curve coordinate* e cioè le immagini delle rette orizzontali e verticali nel dominio U di una parametrizzazione. Queste linee sono come le coordinate nel piano.

Allora possiamo pensare di utilizzare le parametrizzazioni locali per "trasportare" le variabili indipendenti dal piano alla superficie. Facciamo un disegno:



Se $p \in S$ è un punto, per definizione di superficie regolare c'è una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \to S$ con $p \in \mathbf{x}(U)$. Possiamo allora considerare la composizione

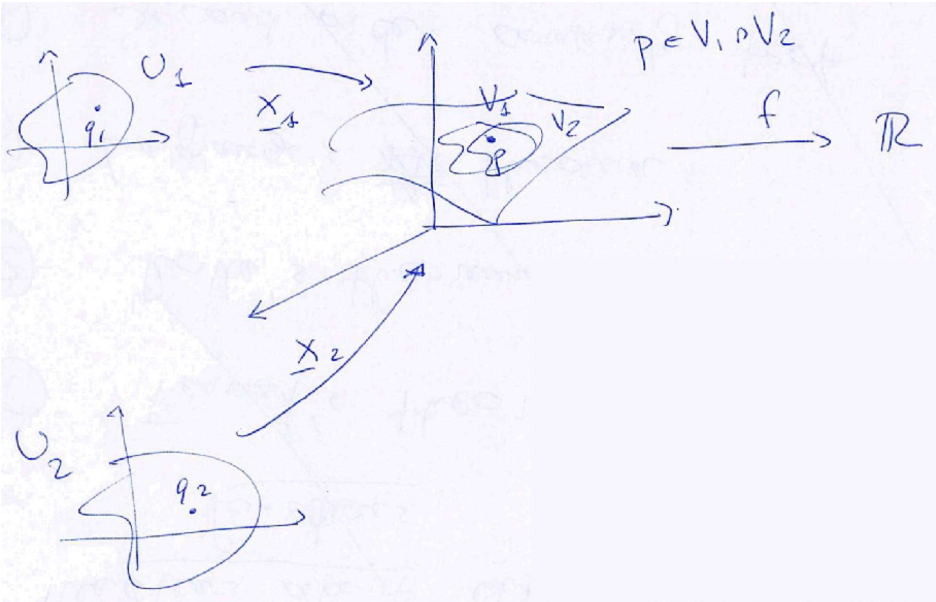
$$(f \circ \mathbf{x}) : U \to \mathbb{R}$$

e questa è una funzione da un *aperto* U a valori reali e quindi sappiamo cosa vuole dire differenziabile. Diamo quindi la definizione (do Carmo, Definizione 1, Paragrafo 2-3)

Definizione 2.1. Sia $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in S$. Si dice che f è *differenziabile in* p se esiste una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \to S$, con $p = \mathbf{x}(q) \in \mathbf{x}(U)$ e la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile in q.

Questa definizione è quella *corretta*, però così come è data non ha molto senso. Richiede infatti l'esistenza di *una* parametrizzazione con opportune proprietà. Cosa succede se troviamo una parametrizzazione $\mathbf{x}_1$ per cui $(f \circ \mathbf{x}_1)$

non è differenziabile? Per quello che sappiamo, potrebbe esistere un'altra parametrizzazione $\mathbf{x}_2$ per cui la composizione è differenziabile e quindi la funzione è differenziabile, oppure la composizione non è mai differenziabile e quindi la funzione non è differenziabile.



Nella situazione illustrata qui sopra potrebbe essere $(f \circ \mathbf{x}_1)$ *non* differenziabile mentre $(f \circ \mathbf{x}_2)$ *è* differenziabile. Questo renderebbe la definizione priva di senso, perché la differenziabilità della funzione deve dipendere solo da f e dalla superficie dominio S e non da dati aggiuntivi come la parametrizzazione.

Dobbiamo perciò dimostrare che questa situazione non si può verificare e cioè che o *per tutte* le parametrizzazioni la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile oppure *per nessuna* parametrizzazione la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile.

Questo fatto è vero ed è una conseguenza immediata della prossima proposizione, che è più precisa e tratta i cambiamenti di coordinate.

Proposizione 2.2 (cambiamento di coordinate)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in S$. Siano*

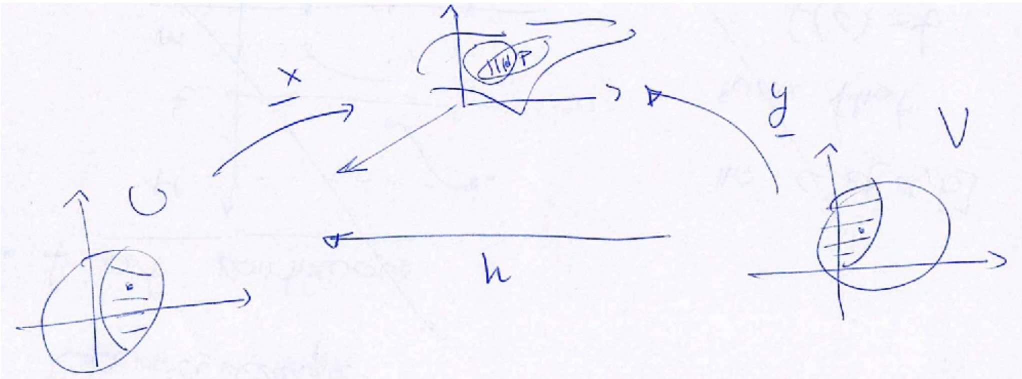
$$\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{y} : V \to \mathbb{R}^3$$

due parametrizzazioni locali tali che $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Allora il cambiamento di coordinate

$$h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$$

è un diffeomorfismo*.*

Ricordiamo che *diffeomorfismo* vuol dire funzione differenziabile, biunivoca, con inversa differenziabile.



Il disegno illustra la situazione: abbiamo due parametrizzazioni e su un opportuno dominio, quello indicato nell'enunciato del teorema, è possibile comporre una con l'inversa dell'altra. Osserviamo che

1. h : (aperto di $\mathbb{R}^2$) $\to$ (aperto di $\mathbb{R}^2$) e quindi sappiamo cosa vuole dire che h è differenziabile: questo è proprio il caso definito e studiato in Analisi

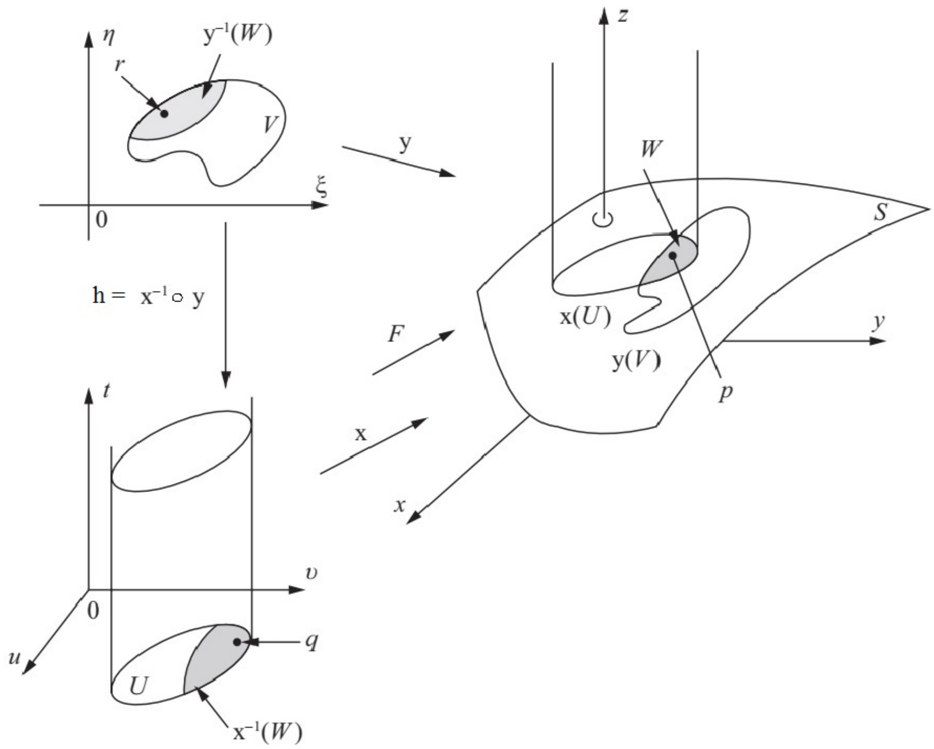
2. se $\mathbf{y}(q_1) = p = \mathbf{x}(q_2)$ allora $h(q_1) = q_2$ e questo è proprio il "cambiamento di coordinate". Infatti (q_1) sono le coordinate del punto $p \in S$ nel sistema $\mathbf{y}$ mentre (q_2) sono le coordinate dello stesso punto $p \in S$ nel sistema $\mathbf{x}$

Dunque la proposizione dice che questi cambiamenti sono diffeomorfismi. Ricordate la definizione di superficie topologica vista in GEOMETRIA DUE: in quel caso i cambiamenti di coordinate sono omeomorfismi e non si può dire di più perché abbiamo solo una struttura di spazio topologico, che permette di parlare di continuità ma non di differenziabilià.

In questo caso, la definizione che abbiamo dato di superficie regolare è forte a sufficienza per implicare che quando cambiamo coordinate, lo facciamo automaticamente in modo differenziabile. Dunque la nozione di differenziabilità è ben definita e dipende solo dalla superficie e non dalla particolare parametrizzazione scelta.

Il problema principale della dimostrazione che vedremo è che la funzione $\mathbf{x}^{-1}$ è definita solo su (un aperto di) S che *non è aperto* in $\mathbb{R}^3$ e quindi non sappiamo bene cosa voglia dire differenziabile e non possiamo usare nessuno dei teoremi sulle funzioni differenziabili che conosciamo dall'Analisi. La dimostrazione affronta proprio questo problema e con una construzione opportuna ci consentirà di concludere usando il teorema sulla composizione di funzioni differenziabili.

Dimostrazione. Riportiamo l'illustrazione del do Carmo, per seguire meglio i ragionamenti che faremo



Le coordinate si chiamano (ξ, η) per l'aperto V e (u, v) per l'aperto U. L'aperto U è disegnato nel piano $t = 0$ di uno spazio $\mathbb{R}^3$. Introdurremo la coordinata t nel corso della dimostrazione.

La prima cosa che osserviamo è che h è un *omeomorfismo*, perché sia $\mathbf{x}$ che $\mathbf{y}$ sono omeomorfismi. Dimostriamo adesso che h è differenziabile. La dimostrazione del fatto che h^{-1} è differenziabile è la stessa, scambiando i ruoli di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

La dimostrazione produrrà una funzione differenziabile che estende $\mathbf{x}^{-1}$ ad un aperto di $\mathbb{R}^3$. A quel punto basterà applicare il teorema sulla composizione di funzioni differenziabili.

Sia dunque $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ tale che $\mathbf{y}(r) = p = \mathbf{x}(q)$ di modo che $q = h(r)$. Per ipotesi, $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione e quindi il differenziale ha rango 2 e, posto

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

possiamo supporre che sia

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$$

Definiamo allora

$$\begin{aligned} F : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t) \end{aligned}$$

e cioè ogni sezione orizzontale del cilindro $U \times \mathbb{R}$ viene mandata in una "traslata verticale" della superficie S : questo è l'effetto di sommare la quantità t alla componente $z(u,v)$.

La funzione che stiamo cercando di costruire sarà l'inversa di questa funzione F. Dobbiamo dunque dimostrare che F è invertibile con inversa differenziabile. Per prima cosa osserviamo che

a) F è differenziabile

b) $F_{|U\times\{0\}} = \mathbf{x}$

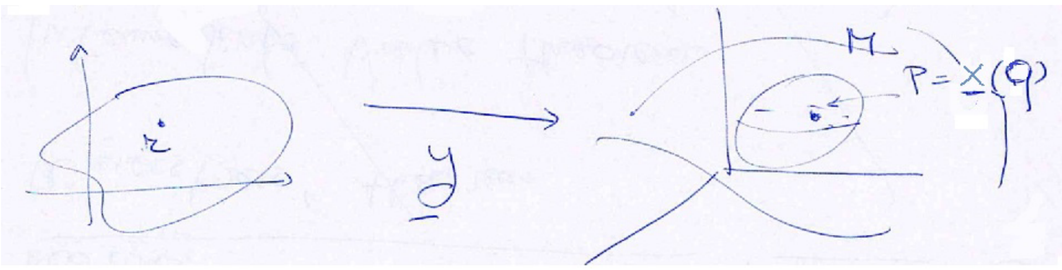
La a) è ovvia perché tutto ciò che interviene nella definizione di F è differenziabile (x, y, z per ipotesi sono differenziabili, in quanto le componenti della parametrizzazione $\mathbf{x}$, e poi facciamo solo una somma). Anche la b) è ovvia, ponendo $t = 0$.

Dunque F è un'estensione della funzione $\mathbf{x}$ ad un aperto di $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo il differenziale

c) $dF_{(q,0)} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & 1 \end{bmatrix}$ (la terza colonna è la derivata parziale rispetto a t)

e quindi $\det(dF_{(q,0)}) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$.

Allora, per il teorema della funzione inversa, esiste un intorno M del punto $F(q,0) = \mathbf{x}(q) \in \mathbb{R}^3$ su cui F è invertibile, con inversa F^{-1} differenziabile.



Questa è la parte "alta" del diagramma iniziale. Il punto fondamentale è che M è un intorno del punto p in $\mathbb{R}^3$ e cioè contiene una palla 3-dimonsionale aperta di centro p. La funzione F^{-1} è quindi definita su un *aperto* di $\mathbb{R}^3$ quindi è differenziabile nel senso usuale.

Finora abbiamo usato solo le proprietà della parametrizzazione $\mathbf{x}$. Adesso usiamo la continuità di $\mathbf{y}$: poiché $\mathbf{y}(r) = p = \mathbf{x}(q)$, esiste un intorno N di $r \in \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{y}(N) \subseteq M$.

Possiamo dunque scrivere:

$$h_{|N} = (\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})_{|N} = (F^{-1} \circ \mathbf{y})_{|N}$$

perché l'immagine di $\mathbf{y}$ è in $S \cap M$ e quindi $\mathbf{x}$ è il "livello 0 di F.

Quello che abbiamo ottenuto è che F^{-1} è proprio l'estensione di $\mathbf{x}^{-1}$ da un aperto sulla superficie S ad un aperto di $\mathbb{R}^3$.

Abbiamo finito: $\mathbf{y}$ è differenziabile per ipotesi, F^{-1} è differenziabile su un intorno aperto di $p = \mathbf{y}(r)$ e dunque la composizione è differenziabile in un intorno del punto r. Poiché il punto r è stato scelto arbitrariamente in $\mathbf{y}^{-1}(W)$, la funzione h è differenziabile in tutti i punti del suo dominio $\mathbf{y}^{-1}(W)$ □

Corollario 2.3. *Sia $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in S$. Se esiste una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \to S$, con $p = \mathbf{x}(q) \in \mathbf{x}(U)$ tale che la funzione $(f \circ \mathbf{x})$ è differenziabile in q allora per ogni altra parametrizzazione $\mathbf{y} : V \to S$, con $\mathbf{y}(r) = p$ si ha che $(f \circ \mathbf{y})$ è differenziabile in r.*

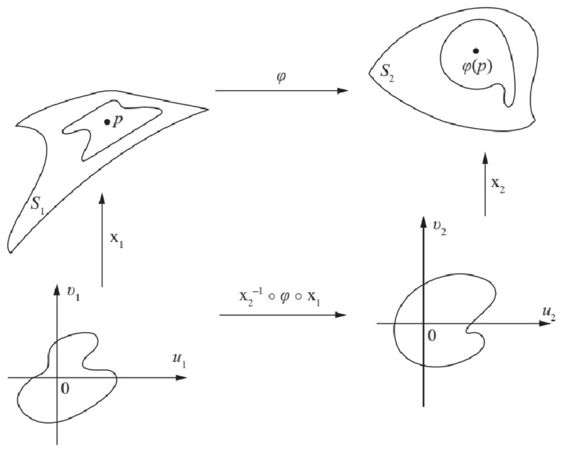
Dimostrazione. Basta scrivere

$$f \circ \mathbf{y} = f \circ (\mathbf{x} \circ h) = (f \circ \mathbf{x}) \circ h$$

(ricordare il diagramma di pagina 9) e quindi $f \circ \mathbf{y}$ è composizione di due funzioni differenziabili. □

Dunque la Definizione 2.1 è corretta.
Abbiamo già osservato che la definizione di funzione differenziabile $F : S \to \mathbb{R}^n$ richiede semplicemente che le componenti siano tutte funzioni differenziabili. Diamo invece la definizione di funzione differenziabile fra superfici (sia il dominio che il codominio sono superfici regolari).

Come sempre ci aiutiamo con un diagramma



Definizione 2.4. Sia $\varphi : S_1 \to S_2$ una funzione continua e sia $p \in S_1$. La funzione φ si dice *differenziabile in* p se esistono due parametrizzazioni locali

$$\mathbf{x}_1 : U_1 \to S_1, \qquad \mathbf{x}_2 : U_2 \to S_2$$

tali che $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$ e $\varphi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$ per cui la funzione

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \to U_2$$

sia differenziabile in $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$.

Che il concetto di differenziabilità non dipenda dalle parametrizzazioni scelte è, come il Corollario precedente, una conseguenza immediata della Proposizione 2.2 sul cambiamento di coordinate.

La funzione $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_1$ è una funzione da un aperto del piano in un altro aperto del piano. Le sue variabili indipendenti sono le coordinate locali per S_1 e le sue componenti sono le coordinate locali per S_2. La funzione si dice *espressione in coordinate locali* di φ.

In tutti i casi in cui si vuole studiare una funzione particolare, la prima cosa da fare è trovare parametrizzazioni locali opportune per dominio e codominio e scrivere la funzione in coordinate locali. Questo è l'analogo nel fissare un sistema di riferimento e scrivere la funzione rispetto al sistema fissato. In questo modo la funzione viene trasformata in una funzione "numerica", cioè trasforma numeri (le coordinate in partenza) in numeri (le coordinate in arrivo) e quindi si può studiare come una funzione usuale fra aperti di $\mathbb{R}^2$ e in particolare si possono utilizzare tutti i teoremi noti sulle funzioni differenziabili.

La Proposizione 2.2 garantisce che tutto quello che otteniamo a riguardo delle proprietà di differenziabilità non dipende dalle coordinate locali scelte ed è quindi una proprietà delle superfici e delle funzioni considerate.

Questo sarà il modo di operare da adesso in poi.