

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

CORSO DI STUDI IN MATEMATICA

GEOMETRIA 3 – A.A. 2019/20

## Lezione 8

Alberto Albano

Cominciamo questa lezione con alcuni esempi di funzioni differenziabili, per fare pratica con la definizione vista nella scorsa lezione. Vediamo un semplice criterio che ci permetterà di verificare, in quasi tutti i casi che incontreremo, che una funzione è differenziabile.

Passiamo poi alla definizione di *differenziale* di una funzione. La difficoltà maggiore è identificare il *dominio*: poiché il differenziale è un'applicazione lineare, il suo dominio deve essere uno spazio vettoriale e in particolare, non potrà mai essere (tranne in casi banali) la superficie dominio della funzione. La definizione richiede di identificare i *vettori tangenti* e introdurremo lo *spazio tangente*. Saremo quindi in grado di riconoscere la relazione usuale fra differenziale e matrice Jacobiana.

Continuiamo a seguire il percorso del do Carmo, fine del Capitolo 2-3 e Capitolo 2-4. Il secondo paragrafo sul fibrato tangente è più astratto e generale del contenuto del do Carmo e questi argomenti non sono trattati.

### 1 Esempi di funzioni differenziabili

Ricordiamo la definizione:

**Definizione.** Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e  $p \in S$ . La funzione  $f$  è differenziabile in  $p$  se esiste una parametrizzazione locale  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  con  $\mathbf{x}(q) = p$  tale che la funzione  $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $q$ .

Spesso si può concludere che una funzione è differenziabile usando la seguente (do Carmo, Example 1, pag. 75):

**Osservazione.** Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e sia  $V$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $S \subseteq V$ . Sia  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione differenziabile. Allora la restrizione di  $f$  a  $S$  è differenziabile (in ogni punto  $p \in S$ ). Infatti, per ogni parametrizzazione locale  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  la funzione  $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è differenziabile.

Cioè, la restrizione di una funzione differenziabile (definita su un *aperto* di  $\mathbb{R}^3$ ) è differenziabile.

Alcuni esempi di questo tipo sono:

**Esempio 1.1** (La funzione *altezza*). Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare, e sia  $\mathbf{v}$  un vettore di norma 1. Per ogni punto  $P \in S$ , indichiamo con  $OP$  il vettore (applicato nell'origine) con punto finale  $P$ . La funzione

$$h_{\mathbf{v}}(P) = OP \cdot \mathbf{v}$$

è allora differenziabile come funzione  $h_{\mathbf{v}} : S \rightarrow \mathbb{R}$  perché è definita su tutto  $\mathbb{R}^3$  (certamente un aperto che contiene  $S$ ) ed è differenziabile su  $\mathbb{R}^3$ : rispetto alla base standard  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  possiamo scrivere

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}, \quad OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

dove  $(x, y, z)$  sono le coordinate del punto  $P \in S \subseteq \mathbb{R}^3$ . Si ha

$$h_{\mathbf{v}}(P) = h_{\mathbf{v}}(x, y, z) = ax + by + cz$$

che è chiaramente differenziabile (è lineare). Il numero  $h_{\mathbf{v}}(P)$  rappresenta la distanza con segno (l'altezza) del punto  $P$  dal piano perpendicolare al vettore  $\mathbf{v}$  e passante per l'origine. In particolare, per  $\mathbf{v} = \mathbf{k}$  si ha  $h_{\mathbf{v}}(x, y, z) = z$  e usando gli altri vettori della base otteniamo che le funzioni coordinate sono funzioni differenziabili sulla superficie  $S$ .

Abbiamo già visto questa funzione nella dimostrazione del teorema di Milnor (Lezione 5).

**Esempio 1.2** (Il quadrato della distanza). Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e sia  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  un punto fissato. La funzione "distanza da  $P_0$ " data da

$$d(P, P_0) = f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

è differenziabile su  $\mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$  (che è un aperto) e quindi, se  $P_0 \notin S$ , la sua restrizione a  $S$  è una funzione differenziabile su tutta  $S$ .

Se invece  $P_0 \in S$ , possiamo considerare la "distanza al quadrato",

$$(d(P, P_0))^2 = g(P) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

che è differenziabile anche in  $P_0$  e quindi è differenziabile come funzione su  $S$ .

Consideriamo adesso il caso di funzioni il cui dominio e codominio siano superfici. Una generalizzazione dell'Osservazione precedente ci da un semplice criterio:

**Osservazione** (do Carmo, Example 3, pag. 77). Siano  $S_1$  e  $S_2$  due superfici regolari e sia  $V$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $S_1 \subseteq V$ . Sia  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione differenziabile tale che  $f(S_1) \subseteq S_2$ . Allora la restrizione di  $f$  a  $S_1$  è una funzione differenziabile  $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ .

Infatti, dato  $p \in S_1$  e due parametrizzazioni  $\mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow S_1$  e  $\mathbf{x}_2 : U_2 \rightarrow S_2$  tali che  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  e  $f(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$  la funzione

$$\mathbf{x}_2^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

è differenziabile e cioè la funzione  $f$  è differenziabile come funzione fra superfici.

La parametrizzazione  $\mathbf{x}_1$  esiste sempre (per definizione di superficie regolare) e basta prendere  $\mathbf{x}_2$  tale che  $f(p) \in \mathbf{x}_2(U_2)$ . Per la continuità di  $\mathbf{x}_1$ ,  $f$  e  $\mathbf{x}_2^{-1}$ , la condizione  $f(\mathbf{x}_1(U_1)) \subseteq \mathbf{x}_2(U_2)$  può essere soddisfatta restringendo, se necessario, l'aperto  $U_1$ .

Di nuovo, la restrizione di una funzione differenziabile (definita su un aperto di  $\mathbb{R}^3$ ) è differenziabile.

**Esempio 1.3.** Sia  $S$  simmetrica rispetto al piano  $xy$  e cioè  $(x, y, z) \in S \implies (x, y, -z) \in S$  (per esempio, una sfera centrata nell'origine). Allora la funzione

$$f(x, y, z) = (x, y, -z)$$

è differenziabile come funzione  $f : S \rightarrow S$ . È chiaro che questa funzione è un diffeomorfismo, perché è uguale alla sua inversa, che è dunque ancora differenziabile.

**Esempio 1.4.** Come prima, per una superficie invariante per una rotazione di angolo  $\theta$  intorno all'asse  $z$ . Allora la rotazione di angolo  $\theta$  è un diffeomorfismo di  $S$  in se stessa.

**Esempio 1.5.** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

dove  $a, b, c$  sono tutti non nulli. La funzione  $f$  è differenziabile (con inversa differenziabile) e manda la sfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

nell'ellissoide

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

Quindi la sfera e l'ellissoide sono superfici diffeomorfe.

## 2 Il fibrato tangente

Vogliamo adesso definire con precisione i concetti di *vettore tangente* e *spazio tangente*.

Ricordiamo che sullo spazio  $\mathbb{R}^3$  in cui sta la superficie convivono le strutture di spazio affine (i cui elementi sono i punti, per esempio i punti della superficie) e di spazio vettoriale (i cui elementi sono vettori). I vettori tangenti stanno nello spazio vettoriale, però abbiamo già discusso il fatto che i vettori tangenti ad una curva devono essere considerati come “vettori applicati” e cioè ci dobbiamo ricordare in quale punto della curva il vettore è tangente.

Introduciamo quindi alcuni concetti astratti, a cui avevamo fatto riferimento nell'intervento sul Forum della Lezione 5 a proposito dell'indicatrice delle tangenti. Poiché il discorso è generale e in seguito sarà utile considerare uno spazio ambiente di dimensione qualunque, diamo le definizioni seguenti per  $\mathbb{R}^n$ .

Fissiamo una notazione speciale: scriviamo  $\mathbb{R}_a^n$  per indicare  $\mathbb{R}^n$  come spazio affine e  $\mathbb{R}_v^n$  per indicare  $\mathbb{R}^n$  come spazio vettoriale.

**Definizione 2.1.** Sia  $p \in \mathbb{R}_a^n$ . Un *vettore tangente*  $\mathbf{v}_p$  a  $\mathbb{R}_a^n$  in  $p$  è una coppia  $\mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v})$  dove  $p$  è il punto considerato e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_v^n$  è un vettore.

Dato un vettore tangente  $\mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v}$  si dice *parte vettoriale*,  $p$  si dice *punto di applicazione*.

Leggiamo con attenzione la definizione: i vettori sono tangenti *allo spazio*  $\mathbb{R}_a^n$  e cioè ad un oggetto geometrico. Inoltre, ogni vettore tangente è tangente *in un punto* e in particolare non ha senso confrontare vettori tangenti in punti diversi. Cosa è l'insieme di *tutti* i vettori tangenti a  $\mathbb{R}_a^n$ ?

**Definizione 2.2.** L'insieme di tutti i vettori tangenti a  $\mathbb{R}_a^n$  si chiama *fibrato tangente* di  $\mathbb{R}_a^n$  e si indica con  $T\mathbb{R}_a^n$ .

C'è una funzione canonica  $\pi : T\mathbb{R}_a^n \rightarrow \mathbb{R}_a^n$  data da  $\pi(p, \mathbf{v}) = p$  che associa ad ogni vettore tangente il suo punto di applicazione. Cosa è la controimmagine  $\pi^{-1}(p)$ ? È l'insieme di tutti i vettori tangenti in  $p$ : si scrive

$$\pi^{-1}(p) = T_p\mathbb{R}_a^n$$

e si dice  $T_p\mathbb{R}_a^n$  è lo *spazio tangente* a  $\mathbb{R}_a^n$  in  $p$ . Naturalmente  $T_p\mathbb{R}_a^n$  è in corrispondenza biunivoca “naturale” con  $\mathbb{R}_v^n$ , data da  $\varphi_p(p, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$  e dunque possiamo considerare  $T_p\mathbb{R}_a^n$  come spazio vettoriale, con somma di vettori

$$\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p = (p, \mathbf{v}) + (p, \mathbf{w}) = (p, \mathbf{v} + \mathbf{w})$$

e moltiplicazione per scalari

$$\lambda \mathbf{v}_p = \lambda(p, \mathbf{v}) = (p, \lambda \mathbf{v})$$

Notiamo come le operazioni algebriche di somma e moltiplicazione per scalari coinvolgono solo la parte vettoriale dei vettori tangenti, mentre il punto di applicazione deve essere lo stesso in tutti i vettori considerati.

**ATTENZIONE.** Non confondiamo le notazioni:

- $T\mathbb{R}_a^n$  = fibrato tangente = *tutti* i vettori tangenti
- $T_p\mathbb{R}_a^n$  = spazio tangente in  $p$  = vettori tangenti *applicati* in  $p$

Gli spazi  $T_p\mathbb{R}_a^n$  si dicono le *fibre* della mappa  $\pi$ . Essendo controimmagini di punti diversi sono tutte disgiunte a due a due e hanno tutte la struttura di spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  e sono quindi isomorfe fra loro. Possiamo perciò immaginare il fibrato tangente  $T\mathbb{R}_a^n$  come tante “fibre” uguali messe una accanto all'altra, parametrizzate dai punti della “base”  $\mathbb{R}_a^n$ .

Se guardiamo nuovamente le definizioni 2.1 e 2.2 possiamo notare che in realtà

$$T\mathbb{R}_a^n = \mathbb{R}_a^n \times \mathbb{R}_v^n$$

e cioè il fibrato tangente  $T\mathbb{R}_a^n$  è un prodotto e la mappa  $\pi$  è la proiezione sul primo fattore. Si esprime questo fatto dicendo che

*il fibrato tangente a  $\mathbb{R}_a^n$  è banale*

Questo significa che il fibrato tangente è il prodotto dello spazio geometrico (in questo caso  $\mathbb{R}_a^n$ ) e uno spazio vettoriale fissato (in questo caso  $\mathbb{R}_v^n$ ) e la mappa “punto di applicazione” è la proiezione sul primo fattore. Quando il fibrato tangente è banale, tutte le fibre sono “naturalmente isomorfe”, e si possono confrontare tramite la proiezione sul secondo fattore.

Non abbiamo mai parlato di dimensione per oggetti che non siano spazi vettoriali. Se interpretiamo (in modo intuitivo) la parola “dimensione” come “numero di parametri liberi” che servono per descrivere tutti i punti di un oggetto, allora possiamo dire che

- la dimensione di  $\mathbb{R}_a^n$  è  $n$
- la dimensione dello spazio tangente in un punto  $T_p\mathbb{R}_a^n$  è  $n = \dim \mathbb{R}_a^n$
- la dimensione del fibrato tangente  $T\mathbb{R}_a^n$  è  $2n = 2 \dim \mathbb{R}_a^n$

Vedremo come si scrivono queste formule in generale.

Consideriamo adesso  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un *sottoinsieme*. È ragionevole pensare che i vettori tangenti ad  $S$  in un suo punto  $p$  siano *alcuni* dei vettori tangenti a tutto  $\mathbb{R}_a^n$  in  $p$  e cioè che il *fibrato tangente ad  $S$*  sia un sottoinsieme di  $T\mathbb{R}_a^n$ .

**Osservazione.**

1. affinché le fibre siano spazi vettoriali (isomorfi fra loro), occorre fare delle ipotesi sul sottoinsieme  $S$
2. non sempre il fibrato tangente è un prodotto del tipo  $S \times V$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale fissato

Affrontiamo adesso il caso delle superfici: sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e sia  $p \in S$ . Non scriveremo più  $\mathbb{R}_a^3$  e  $\mathbb{R}_v^3$  perché è chiaro che:

- se  $p \in S$ , vuol dire che  $p \in \mathbb{R}_a^3$  (nello spazio affine)
- se  $\mathbf{v}$  è un vettore, allora  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_v^3$

Sia

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$$

una curva differenziabile il cui sostegno sia contenuto in  $S$  e tale che  $\alpha(0) = p$ . Il dominio non è importante, basta che sia un intorno di 0. La curva  $\alpha$  passa per il punto  $p$  ed è *tracciata* (cioè contenuta) su  $S$ . Nel punto  $p$  ci sarà il vettore tangente  $\alpha'(0)$  ed è naturale richiedere che questo vettore sia anche tangente alla superficie.

**Definizione 2.3.** Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare,  $p \in S$  e sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  un vettore. Si dice che  $\mathbf{v}$  è *tangente a  $S$  in  $p$*  se esiste una curva differenziabile  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  tale che:

$$\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq S, \quad \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{v}$$

Al variare della curva  $\alpha$ , troviamo molti vettori tangenti. Otteniamo in questo modo un *insieme* di vettori, tutti i vettori tangenti a  $S$  in  $p$ . Questo insieme si chiama *cono tangente a  $S$  in  $p$*  e si indica con  $C_p S$ . Ricordando la discussione precedente sul fibrato tangente a  $\mathbb{R}_a^3$  è chiaro che  $C_p S \subseteq T_p \mathbb{R}_a^3$ :

$$C_p S = \{ \mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v}) \in T_p \mathbb{R}_a^3 \mid \mathbf{v} \text{ è tangente a } S \text{ in } p \}$$

Il nome è dovuto al fatto che questo insieme è un cono. Ricordiamo che

**Definizione 2.4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$ . Un sottoinsieme  $C \subseteq V$  è un *cono con vertice l'origine* se  $\mathbf{v} \in C \implies \lambda \mathbf{v} \in C, \forall \lambda \in K$ .

e cioè un cono è chiuso rispetto alle dilatazioni (moltiplicazioni per scalari). È chiaro che ogni sottospazio vettoriale è anche un cono, ma il viceversa non è vero: l'usuale cono  $x^2 + y^2 = z^2$  di  $\mathbb{R}^3$  è un cono che non è un sottospazio.

I vettori tangenti in un punto formano un cono: se  $\mathbf{v}_p = (p, \mathbf{v}) \in C_p S$  allora esiste una curva  $\alpha(t)$  come nella definizione. Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  consideriamo la curva

$$\beta(t) = \alpha(\lambda t)$$

Allora  $\alpha$  e  $\beta$  hanno lo stesso sostegno e quindi anche  $\beta$  è contenuta in  $S$ . Inoltre

$$\beta(0) = \alpha(0) = p, \quad \beta'(0) = \lambda \alpha'(0) = \lambda \mathbf{v}$$

e quindi anche  $\lambda \mathbf{v}$  è tangente a  $S$  in  $p$  e cioè  $\lambda \mathbf{v}_p = (p, \lambda \mathbf{v}) \in C_p S$ .

Notiamo che il caso  $\lambda = 0$  non è escluso: in questo caso la curva  $\beta$  è la curva costante  $\beta(t) = \alpha(0) = p$  che ha vettore tangente nullo. Dunque il vettore nullo è sempre un vettore tangente.

Nella definizione di vettore tangente e di cono tangente, l'insieme  $S$  può essere arbitrario. Vediamo un paio di esempi:

**Esempio 2.5.** Sia  $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  un *aperto*. Allora  $C_p U = T_p \mathbb{R}_a^n$ . Infatti per il punto  $p$  passano rette per ogni direzione e poiché  $U$  è aperto, ogni retta interseca  $U$  in un intervallo aperto e dunque tutti i vettori sono vettori tangenti ad  $U$ .

**Esempio 2.6.** Sia  $S$  il cono  $x^2 + y^2 = z^2$  contenuto in  $\mathbb{R}_a^3$ . Allora il cono tangente nell'origine  $O$  è il cono stesso: se una curva è contenuta nel cono e passa per l'origine (il vertice) in quel punto deve avere come direzione tangente una delle generatrici del cono e quindi  $C_O S$  è nuovamente il cono (l'insieme delle sue generatrici).

Invece, il cono tangente nel punto  $p = (1, 0, 1)$  è uno spazio vettoriale di dimensione 2: i vettori tangenti sono i vettori che appartengono al piano tangente nel punto  $p$  che è un punto regolare della superficie.

L'origine è speciale perché in quel punto la superficie non è regolare e non c'è piano tangente.

Vogliamo adesso dimostrare che il cono tangente ad una superficie *regolare* in ogni suo punto è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (ricordare il punto 1 dell'Osservazione nella pagina precedente).

In quello che segue, identificheremo sempre  $T_p \mathbb{R}_a^3$  con lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}_v^3$  che scriveremo semplicemente  $\mathbb{R}^3$ .

Ricordiamo ancora dall'Analisi il differenziale (in un punto!) di una funzione differenziabile: se  $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una funzione differenziabile e  $\mathbf{x}(q) = p$ , il differenziale

$$d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 (= T_q U) \rightarrow \mathbb{R}^3 (= T_p \mathbb{R}_a^3)$$

è la funzione lineare che ha, rispetto alle basi canoniche, la matrice  $[\mathbf{x}_u(q) \ \mathbf{x}_v(q)]$  e cioè è definita da

$$d\mathbf{x}_q(1, 0) = \mathbf{x}_u(q), \quad d\mathbf{x}_q(0, 1) = \mathbf{x}_v(q)$$

**Proposizione 2.7** (do Carmo, Proposition 1, Capitolo 2-4). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e sia  $p \in S$ . Sia*

$$\mathbf{x} : U \rightarrow S$$

*una parametrizzazione locale e sia  $q \in U$  tale che  $\mathbf{x}(q) = p$ . Allora*

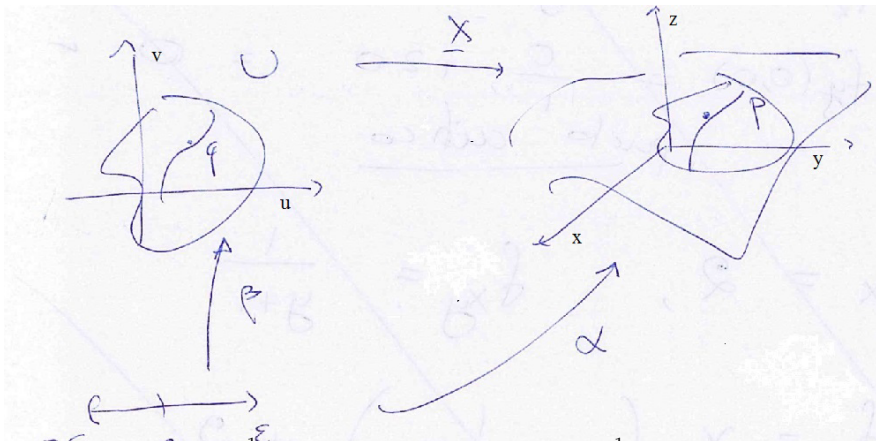
$$C_p S = d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$$

*cioè un vettore è tangente a  $S$  in  $p$  se e solo se è nell'immagine del differenziale di una parametrizzazione.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che i due insiemi sono l'uno contenuto nell'altro. Sia dunque  $\mathbf{w} \in C_p$  un vettore tangente a  $S$  in  $p$ . Allora, per definizione, esiste una curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$  tale che:

$$\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq S, \quad \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{w}$$

Come al solito, un disegno aiuta



La funzione  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$  è differenziabile poiché  $\mathbf{x}^{-1}$  è differenziabile in quanto inversa di una parametrizzazione locale. Verifichiamo questa affermazione: affinché la funzione  $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subseteq S \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$  sia differenziabile (Definizione 2.1 della Lezione 7) deve esistere una parametrizzazione locale  $\mathbf{y} : V \rightarrow S$  tale che  $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  è differenziabile. Ma poiché  $\mathbf{x}$  è una parametrizzazione locale, possiamo prendere  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  e quindi  $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} = \text{id}_U : U \rightarrow U$  che è certamente differenziabile.

Possiamo dunque scrivere

$$\alpha(s) = (\mathbf{x} \circ \beta)(s)$$

e derivando

$$\mathbf{w} = \alpha'(0) = \frac{d}{ds} [\mathbf{x} \circ \beta]_{|s=0} = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)$$

dove  $\beta(s) = (u(s), v(s))$  come funzione a valori in  $\mathbb{R}^2$ . Quindi  $\mathbf{w}$  è combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{x}_u(q)$  e  $\mathbf{x}_v(q)$  e dunque è nell'immagine del differenziale  $d\mathbf{x}_q$ .

Viceversa, sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  e sia  $\mathbf{w} = d\mathbf{x}_q(\mathbf{v})$ . Consideriamo la curva (segmento)

$$\gamma(t) = q + t\mathbf{v}$$

Poiché  $U$  è aperto esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  e inoltre  $\gamma(0) = q$ . Dunque la curva  $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$  è differenziabile, contenuta in  $S$  e  $\alpha(0) = p$  e perciò, per definizione, il vettore  $\alpha'(0)$  è tangente a  $S$  in  $p$ . Calcolando come prima con la formula del differenziale per una funzione composta, e osservando che  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$  si ha

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}[\mathbf{x} \circ \gamma]_{|t=0} = d\mathbf{x}_q(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

e cioè  $\mathbf{w} \in C_p S$ . □

Da questa proposizione ricaviamo alcuni fatti importanti, che mettiamo in evidenza:

- poiché  $d\mathbf{x}_q$  è un'applicazione lineare, la sua immagine è un *sottospazio vettoriale* di  $\mathbb{R}^3 = T_p \mathbb{R}_a^3$ . Dunque, il cono tangente ad una superficie regolare in un suo punto è uno *spazio vettoriale*, che si indica con  $T_p S$  e si chiama *spazio tangente a  $S$  in  $p$* . In particolare, la somma di due vettori tangenti è ancora un vettore tangente: questo non è per niente ovvio. Se anche conosciamo due curve tali che  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$  e  $\beta'(0) = \mathbf{w}$ , come troviamo una curva  $\gamma$  per cui  $\gamma'(0) = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ ? Osserviamo che la scelta ovvia,  $\gamma(t) = \alpha(t) + \beta(t)$  non va bene, perché non è detto che  $\gamma$  sia contenuta in  $S$  (oltre al doversi preoccupare di definire la “somma di punti”). Sottolineiamo che il fatto che lo spazio tangente sia uno spazio vettoriale è conseguenza diretta dell'esistenza di una parametrizzazione locale e cioè del fatto che la superficie è *regolare*;
- l'immagine di  $d\mathbf{x}_q$  a priori dipende dalla parametrizzazione scelta  $\mathbf{x}$ . Poiché l'immagine è  $C_p S$ , che è definito senza far riferimento a nessuna parametrizzazione, si ha: per *ogni* parametrizzazione locale, l'immagine del differenziale è sempre la stessa. Dunque per calcolare lo spazio tangente, possiamo usare la parametrizzazione che vogliamo e cioè: lo *spazio tangente* dipende solo dalla superficie  $S$  (e dal punto  $p$ , naturalmente) e non dalle coordinate locali scelte;
- poiché  $\mathbf{x}$  è una parametrizzazione locale, l'applicazione lineare  $d\mathbf{x}_q$  ha *rango* 2 (condizione ③ della definizione). Dunque  $\dim T_p S = 2$  per ogni punto  $p \in S$  e tutti gli spazi tangenti sono isomorfi fra di loro (ma, in generale, non in modo naturale). Inoltre, una base per  $T_p S$  è data da  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ . Quindi una parametrizzazione non solo dà coordinate locali sulla superficie ma produce anche (gratuitamente) una base per lo spazio tangente  $T_p S$ ;
- se  $\mathbf{w} = \alpha'(0) \in T_p S$  e poniamo  $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$  come nella dimostrazione precedente, abbiamo che

$$\mathbf{w} = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)$$

e cioè nella base  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$  possiamo scrivere  $\mathbf{w} = (u'(0), v'(0))$  e quindi le coordinate di  $\mathbf{w}$  non dipendono dalla curva  $\alpha$  scelta ma solo dalla sua derivata prima;

- quello che usualmente si chiama il *piano tangente* è il piano affine in  $\mathbb{R}_a^3$  che passa per il punto  $p$  e “tocca” (o “si appoggia a”)  $S$ . Questo piano



affine è il traslato dello spazio tangente, portando l'origine di  $T_p S$  in  $p$  e cioè è il piano affine  $H_p$  di equazione parametrica

$$H_p : p + T_p S = p + \lambda \mathbf{x}_u(q) + \mu \mathbf{x}_v(q)$$

- l'insieme di tutti i vettori tangenti alla superficie  $S$  si chiama *fibrato tangente* ed è l'unione di tutti gli spazi tangenti

$$TS = \bigcup_{p \in S} T_p S$$

Per definizione,  $T_p S \subseteq T_p \mathbb{R}_a^3$  e quindi tutti gli spazi tangenti  $T_p S$  sono disgiunti a due a due e  $TS \subseteq T\mathbb{R}_a^3$ . La mappa “punto di applicazione” è la restrizione della proiezione  $\pi : T_p S \rightarrow S$ . Le fibre (controimmagini) di  $\pi$  sono gli spazi tangenti  $\pi^{-1}(p) = T_p S$  e sono tutti spazi vettoriali isomorfi fra loro. In generale però,  $TS$  non è il prodotto  $S \times \mathbb{R}^2$ . Per esempio, vedremo che il fibrato tangente alla sfera non è banale (non è un prodotto). Invece il fibrato tangente di un toro è banale.

**Esempio 2.8.** Sia  $S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  la sfera unitaria e sia  $p = (0, 0, 1)$  il polo nord. Usando la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right)$$

abbiamo  $p = \mathbf{x}(q)$  dove  $q = (0, 0)$  e le derivate sono:

$$\mathbf{x}_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)$$

e quindi  $T_p S$  è il sottospazio vettoriale generato da  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$  cioè il sottospazio vettoriale  $z = 0$ , mentre il *piano tangente* è il piano affine di equazione  $z = 1$ .

Bisogna prestare attenzione al fatto che il do Carmo non sempre distingue i due concetti. Nel seguito useremo sempre la terminologia usata fin qui e cioè: spazio tangente per indicare il sottospazio vettoriale e piano tangente per indicare il sottospazio affine.

### 3 Il differenziale di una funzione differenziabile

Iniziamo con una caratterizzazione geometrica del differenziale usuale. Sia dunque  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione differenziabile (non necessariamente una parametrizzazione) e sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$  un vettore. Consideriamo una curva (qualunque)  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  tale che  $\alpha(0) = q \in U$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{w}$ . Per esempio,  $\alpha$  potrebbe essere un segmento sufficientemente piccolo sulla retta  $q + t\mathbf{w}$ , ma qualunque curva che rispetti le condizioni richieste va bene.

La curva  $\mathbf{x} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva differenziabile nello spazio e si ha

$$d\mathbf{x}_q(\mathbf{w}) = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0)$$

(questa è la dimostrazione fatta nella proposizione precedente). Dunque

per trovare l'immagine di un vettore tangente ad una curva mediante il differenziale di una funzione, basta prendere il vettore tangente alla curva immagine mediante la funzione

Questa frase contiene solo condizioni geometriche e non richiede di conoscere il differenziale: può dunque essere usata come definizione generale di differenziale di una mappa.

**Definizione 3.1.** Sia  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  una funzione differenziabile fra superfici regolari e sia  $p \in S_1$ . Sia  $\mathbf{w} \in T_p S_1$  e sia  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$  una curva tale che  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = \mathbf{w}$ . Poniamo per definizione

$$d\varphi_p(\mathbf{w}) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

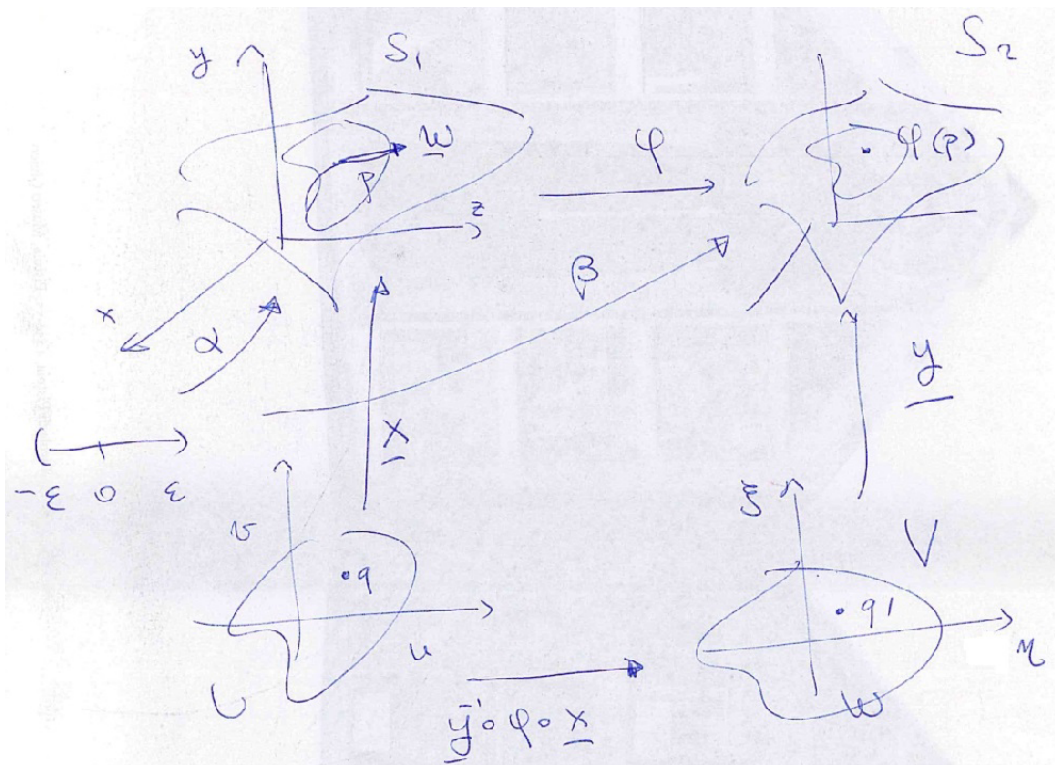
La curva  $\alpha$  esiste per definizione di vettore tangente. Abbiamo in questo modo una funzione

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

La definizione di  $d\varphi_p$  richiede la scelta di una curva  $\alpha$  per ogni elemento del dominio e perciò dobbiamo per prima cosa dimostrare che questa funzione è ben definita. Inoltre, anche se sia dominio che codominio sono spazi vettoriali non è per niente evidente che questa funzione sia lineare. La prossima proposizione affronta questi problemi.

**Proposizione 3.2** (do Carmo, Proposition 2, Capitolo 2-4). *La funzione  $d\varphi_p$  è ben definita (e cioè non dipende dalla scelta di  $\alpha$ ) ed è lineare.*

*Dimostrazione.* Disegniamo con cura la situazione. Le lettere scelte dal do Carmo sono particolarmente scomode e useremo lettere leggermente diverse. La dimostrazione è però la stessa.



Sia  $\mathbf{w} \in T_p S_1$  e sia  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$  tale che  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = \mathbf{w}$ . Per calcolare, usiamo due parametrizzazioni locali per  $S_1$  e  $S_2$ , intorno ai punti  $p$  e  $\varphi(p)$  rispettivamente. Abbiamo perciò

$$\mathbf{x} : U \rightarrow S_1, \quad \mathbf{y} : V \rightarrow S_2$$

In componenti,  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  mentre per la parametrizzazione  $\mathbf{y}$  le variabili indipendenti sono  $(\xi, \eta)$ . Poniamo anche  $\mathbf{x}(q) = p$ ,  $\mathbf{y}(q') = \varphi(p)$  i punti negli aperti che hanno come immagine i punti che ci interessano sulle superfici. Dovremo calcolare quindi le derivate in questi punti.

Le basi per gli spazi tangenti dati dalle parametrizzazioni sono

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\} &= \text{base di } T_p S_1 \\ \{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\} &= \text{base di } T_{\varphi(p)} S_2 \end{aligned}$$

Scriviamo le funzioni in coordinate locali:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)(t) &= (u(t), v(t)) && \text{la curva } \alpha \\ \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} &= (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) && \text{la funzione } \varphi \end{aligned}$$

e dobbiamo calcolare

$$\beta'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

Osserviamo che (questo è il calcolo fondamentale)

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = \mathbf{y}^{-1} \circ \beta$$

e cioè la curva  $\beta$  in coordinate locali. Dunque

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$$

Le coordinate di  $\beta'(0)$  nella base  $\{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\}$  si trovano derivando rispetto a  $t$  l'espressione in coordinate locali e si ha, usando la solita formula per le derivate della funzione composta:

$$(\mathbf{y}^{-1} \circ \beta)'(0) = \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(q) \cdot v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(q) \cdot v'(0) \right]$$

che si può scrivere come

$$d\varphi_p(\mathbf{w}) = \beta'(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

dove il vettore  $\beta'(0)$  è scritto usando le sue coordinate rispetto alla base  $\{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\}$ . Il calcolo mostra che

1.  $d\varphi_p(\mathbf{w})$  dipende solo dalle derivate di  $\varphi$  e dalle coordinate di  $\mathbf{w}$  e *non dalla curva  $\alpha(t)$  scelta* e quindi è ben definita;
2. la funzione  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$  è *lineare* perché è data, in coordinate rispetto alle basi  $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$  e  $\{\mathbf{y}_\xi(q'), \mathbf{y}_\eta(q')\}$ , dalla moltiplicazione di matrici. In particolare, rispetto alle basi degli spazi tangenti date dalle parametrizzazioni, la matrice del differenziale è la *matrice Jacobiana* della funzione  $\varphi$  in coordinate locali e cioè dalla matrice  $J(\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x})(q)$ .

e queste sono proprio le affermazioni che dovevamo dimostrare. □