Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 9

Alberto Albano

In questa lezione vediamo in dettaglio vari esempi di superfici, in modo da avere una panoramica abbastanza estesa dei casi che studieremo e per avere materiale a cui applicare le tecniche che svilupperemo in seguito.

La seconda parte della lezione sarà dedicata al primo importante concetto geometrico: la *prima forma quadratica fondamentale*, che descrive gli aspetti "metrici" (distanze, aree, angoli ...) di una superficie. Da questo punto in poi, tutto quello che faremo sulle superfici è dovuto a Gauss che nel 1827 fu il primo a studiare le superfici come oggetto matematico e introdusse le idee fondamentali per il loro studio. Il nostro percorso è simile a quello delineato da Gauss, con una fondamentale differenza: useremo strumenti di algebra lineare non ancora presenti al tempo di Gauss, ma ben noti oggi a tutti gli studenti del primo anno. Questo uso dell'algebra lineare semplificherà e renderà facilmente comprensibili alcune delle costruzioni e dimostrazioni di Gauss.

1 Esempi di superfici regolari

1.1 Superfici di rotazione

Sia C una curva *regolare* nel piano xz e che non incontra l'asse z. Possiamo dunque scriverla in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}$$

con $a < v < b$ e $f(v) > 0$, $\forall v \in (a, b)$. Questa seconda condizione deriva dal fatto che la curva non incontra l'asse z. Non supponiamo che la curva sia parametrizzata per arcolunghezza ma osserviamo che la curva è regolare e quindi la parametrizzazione è iniettiva, cioè la funzione

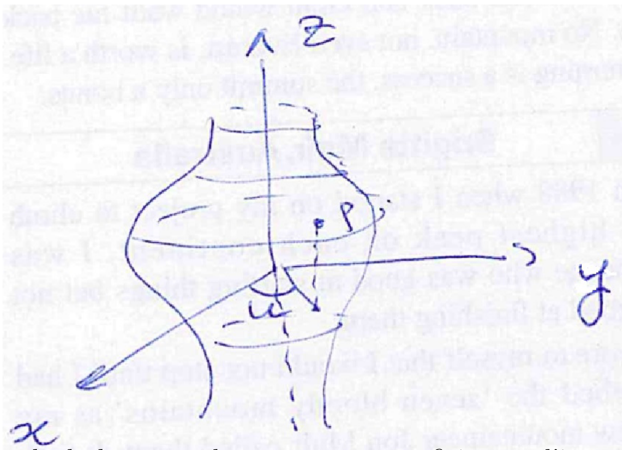
$$\alpha(v) = (f(v), g(v))$$

è iniettiva. In particolare, questo vuol dire che ogni punto della curva è preso una sola volta o che, equivalentemente, se conosciamo le coordinate $(x_0, z_0) \in C$ di un punto della curva, allora esiste un *unico* $v_0 \in (a, b)$ tale che $x_0 = f(v_0)$ e $z_0 = g(v_0)$. Se pensiamo al parametro v come al *tempo*, v_0 è l'unico istante di tempo in cui la curva passa per (x_0, z_0).

Usiamo il nome v per il parametro della curva perché questo è uno dei due parametri per la superficie che costruiremo e di solito abbiamo usato (u, v) come variabili indipendenti di una parametrizzazione locale.

Ruotando la curva C intorno all'asse z, si ottiene una *superficie di rotazione* S. Se $p \in S$, indichiamo con u l'angolo (in radianti) fra il semiasse positivo x e la proiezione di p sul piano xy (vedi figura). La superficie S ha equazioni parametriche:

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v)\, \cos u, f(v)\, \sin u, g(v))$$



Ricordiamo che le *linee coordinate* su una superficie sono l'immagine delle rette verticali e orizzontali nel dominio U e hanno quindi equazioni $v =$costante e $u =$ costante. In questo caso:

- ogni curva della forma $v =$ costante è una circonferenza di raggio $f(v)$ e centro sull'asse z, sul piano orizzontale $z = g(v)$
- ogni curva della forma $u =$ costante è la rotazione della curva C di angolo u

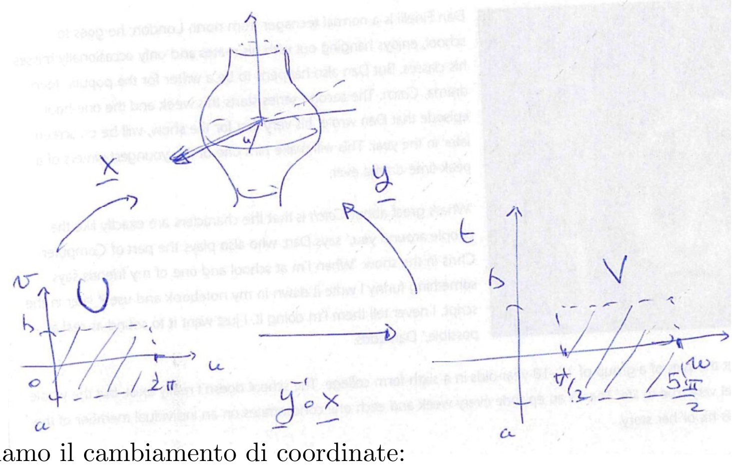
Nel caso delle superfici di rotazione queste curve si chiamano, rispettivamente, *paralleli* e *meridiani*, in accordo con il significato geografico usuale.

Affinché la parametrizzazione $\mathbf{x}$ sia iniettiva, il dominio deve essere scelto in modo opportuno. Il dominio più grande che si può scegliere è

$$U = (0, 2\pi) \times (a, b)$$

e in questo modo $\mathbf{x}$ copre tutta la superficie "meno un meridiano". Ruotando di $\pi/2$ (in realtà, va bene un angolo qualunque) si ottiene un'altra parametrizzazione

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : (\pi/2, 5/2\pi) \times (a, b) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (w, t) &\longmapsto (f(t)\, \cos w, f(t)\, \sin w, g(t)) \end{aligned}$$



Scriviamo il cambiamento di coordinate:

$$\left(\mathbf{y}^{-1}\circ\mathbf{x}\right)(u,v) = (u+\pi/2, v)$$

e cioè il cambiamento di coordinate è

$$\begin{cases} w = u+\pi/2 \\ t = v \end{cases}$$

che è chiaramente $\mathcal{C}^\infty$ e invertibile, come previsto dal teorema generale.

Non abbiamo ancora dimostrato che $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono parametrizzazioni. È chiaro che la dimostrazione è la stessa e scriviamo il caso di $\mathbf{x}$. La funzione $\mathbf{x}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché lo sono sia le funzioni seno e coseno e anche le funzioni $f(v)$ e $g(v)$ perché la curva è regolare. Verifichiamo la condizione ③ sul rango del differenziale: la matrice delle derivate parziali è

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -f(v)\sin u & f'(v)\cos u \\ f(v)\cos u & f'(v)\sin u \\ 0 & g'(v) \end{bmatrix}$$

I determinanti dei tre minori 2×2 sono

$$-f(v)f'(v) \qquad -f(v)g'(v)\sin u \qquad f(v)g'(v)\cos u$$

Poiché $f(v)>0$, possiamo dividere (e cambiare segno) e consideriamo le tre quantità

$$f'(v) \qquad g'(v)\sin u \qquad g'(v)\cos u$$

Se $f'(v)\neq 0$ siamo a posto. Se $f'(v)=0$ allora, poiché la curva C è regolare, sarà $g'(v)\neq 0$ e poiché $\sin u$ e $\cos u$ non sono mai contemporaneamente nulli, almeno uno fra il secondo e il terzo termine sarà diverso da 0. Dunque almeno un determinante è sempre diverso da 0 e cioè la matrice ha rango 2.

Dobbiamo adesso dimostrare che $\mathbf{x}$ è iniettiva e che l'inversa è ancora continua. Sia dunque $\mathbf{x}(u,v)=(x,y,z)$. Allora

$$f(v)=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(v)=z$$

e quindi da (x,y,z) ricaviamo $(f(v),g(v))$ e da queste ricaviamo v perché abbiamo già osservato che la parametrizzazione della curva C è iniettiva. Queste formule mostrano anche che $f(v)$ e $g(v)$ sono funzioni continue di (x,y,z).

Dunque $\mathbf{x}^{-1}$ esiste. La parametrizzazione $\alpha(v)$ è regolare e cioè la sua derivata è diversa da 0. Allora l'inversa (che abbiamo visto esistere) è differenziabile e in particolare continua. Dunque la composizione

$$(x, y, z) \mapsto \alpha(v) = (f(v), g(v)) \mapsto v$$

è continua, cioè v è una funzione continua di (x, y, z). Resta da dimostrare che anche u è funzione continua di (x, y, z).

Per questo, supponiamo prima che sia $u \neq \pi$ e quindi $\cos(u/2) \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned}
\tan\frac{u}{2} &= \frac{\sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}} = \frac{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1+\cos u} \\
&= \frac{y/f(v)}{1 + x/f(v)} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

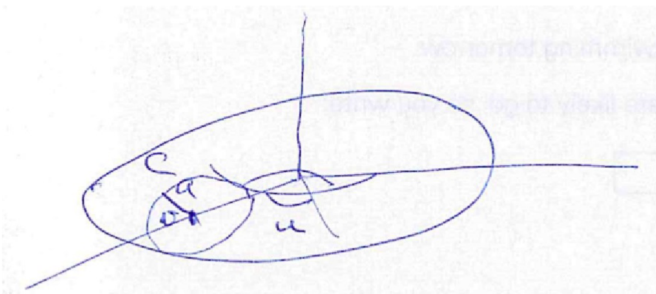
dove gli ultimi passaggi sono giustificati dal fatto che $f(v) \neq 0$ e quindi si può dividere per $f(v)$. Allora

$$u = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

è una funzione continua. Per un intorno di $u = \pi$, basta prendere l'analoga espressione per la cotangente e si ottiene ancora u come funzione continua di (x, y, z).

1.2 Il toro

Il toro si ottiene ruotando una circonferenza intorno ad una retta che non la incontra. La situazione è simile alla precedente, con una importante differenza



che spiegheremo.

Fissiamo $0 < r < a$ e sia C la circonferenza nel piano xz di centro $(a, 0, 0)$ e raggio r. Poiché $r < a$ la circonferenza non incontra l'asse z e possiamo ruotare. La parametrizzazione di C è:

$$\begin{cases} x = a + r\cos v \\ z = r\sin v \end{cases}$$

e quindi

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (a + r\cos v)\,\cos u \\ y = (a + r\cos v)\,\sin u \\ z = r\sin v \end{cases}$$

Le *linee coordinate* sono:

- i meridiani $u =$ costante che sono delle circonferenze verticali, rotazioni della circonferenza C
- i paralleli $v =$ costante sono delle circonferenze orizzontali. Osserviamo che l'intersezione di un piano orizzontale con il toro è l'unione di due circonferenze e queste sono paralleli distinti. Le circonferenze interne si trovano per i valori $\pi/2 < v < 3\pi/2$ e le circonferenze esterne per i valori $0 < v < \pi/2$ e $3\pi/2 < v < 2\pi$

Qual è il dominio di $\mathbf{x}$? Per poter essere iniettiva, deve essere $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ e dunque l'immagine non solo non copre il "meridiano" $u = 0$ ma non copre nemmeno il parallelo $v = 0$, che è la circonferenza esterna sul piano xy.

Ristretta a questo dominio, la curva C non è una circonferenza, ma una circonferenza meno un punto (il punto esterno $(a+r, 0, 0)$). Dunque per coprire l'intero toro non basta ruotare rispetto a u come prime per coprire il meridiano mancante, ma anche rispetto a v. Si ottengono quindi 4 parametrizzazioni locali e non 2.

Il motivo è che la curva C in questo caso è una curva *chiusa* e quindi non può essere parametrizzata iniettivamente da un intervallo aperto e dobbiamo considerare 2 parametrizzazioni la cui unione copre tutta la circonferenza. Scritte con questi domini, le 4 parametrizzazioni sono tutte del tipo considerate nell'esempio precedente e quindi soddisfano le 3 condizioni. Dunque anche il toro è una superficie regolare.

2 Vettore normale e spazio tangente a una superficie

Calcoliamo lo spazio tangente ad una superficie. Sia $p \in S$ e sia $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrizzazione locale di un intorno di p. Sia $q \in U$ tale che $\mathbf{x}(q) = p$. Lo spazio tangente a S in p è generato dai vettori $\mathbf{x}_u(q)$ e $\mathbf{x}_v(q)$. Poniamo

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

sottointendendo la variabile indipendente $q = (u, v)$. Il vettore N è quindi una *funzione* vettoriale, dipendente dai parametri (u, v) e si dice *vettore normale*. Il prodotto esterno è sempre non nullo perché i vettori tangenti $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ sono linearmente indipendenti e quindi si può dividere per la norma e ottenere un vettore di norma costante 1. Dunque

$$\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$$

è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, che varia al variare del punto $p \in S$. È simile al triedro di Frenet, anche se non è in generale ortonormale, e sarà uno strumento importante nello studio delle superfici.

Utilizzando i concetti visti nella scorsa lezione di spazio tangente e fibrato tangente, scriviamo con precisione:

- $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ è una base di T_pS
- $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q), N(q)\}$ è una base di $T_p\mathbb{R}^3_a = \mathbb{R}^3_v$

Lo spazio tangente alla superficie T_p varia al variare del punto p mentre lo spazio tangente a $\mathbb{R}^3_a$ è sempre lo stesso, o meglio tutti gli spazi tangenti sono identificati in modo naturale fra loro. Quello che varia in questo caso è la *base*, proprio come il triedro di Frenet è una base variabile dello spazio vettoriale fisso $\mathbb{R}_v$.

Per la descrizione ben nota dei piani nello spazio, il *piano tangente* a S in p è dunque il piano *passante per* p e *perpendicolare a* N. Indicando con $\mathbf{x} = (x, y, z)$ un punto dello spazio, l'equazione cartesiana del piano tangente è dunque

$$(\mathbf{x} - p) \cdot N = 0$$

Il vettore normale N è sempre considerato di norma 1. Quando interessa solo il piano tangente, si può però usare il vettore $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$ che è parallelo a N e quindi individua lo stesso piano ortogonale, evitando quindi di dover normalizzare.

Esempio 2.1. Calcoliamo lo spazio tangente ad una superficie di rotazione. Per quello che abbiamo visto sopra, la base dello spazio tangente è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0) \\ \mathbf{x}_v &= (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (f(v)g'(v)\cos u,\ f(v)g'(v)\sin u,\ -f(v)f'(v)) \\ &= f(v)\,[g'(v)\cos u,\ g'(v)\sin u,\ -f'(v)] \end{aligned}$$

e poiché $f(v) > 0$ si può dividere e la *direzione* e il *verso* non cambiano. Dunque il vettore normale a una superficie di rotazione è parallelo al vettore

$$[g'(v)\cos u,\ g'(v)\sin u,\ -f'(v)]$$

Per esempio, si può osservare che quando $g'(v) = 0$ il piano tangente è orizzontale: infatti $g(v)$ è la funzione che dà l'altezza della curva rispetto all'asse z e anche l'altezza della superficie rispetto al piano xy. Quando la derivata è nulla, siamo in un minimo o un massimo dell'altezza e quindi il piano tangente è orizzontale.

Invece, quando $f'(v) = 0$, allora il vettore normale è orizzontale (appartiene al piano xy) e quindi il piano tangente è verticale. Anche qui la spiegazione geometrica è chiara: la funzione $f(v)$ dà la distanza dall'asse z e quindi quando la derivata è nulla siamo in punti a distanza minima o massima dall'asse z e il piano tangente è parallelo all'asse z (è “verticale”).

Esercizio 2.2. Calcolare vettore normale e spazio tangente ad un toro e verificare quanto appena detto.

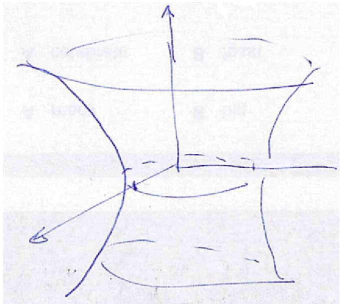
3 Altri esempi di superfici

3.1 La catenoide

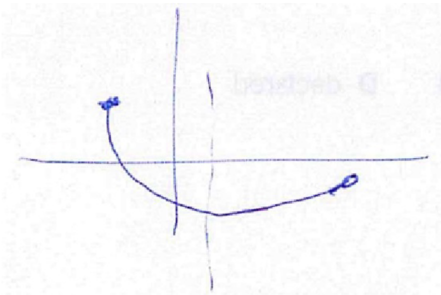
Sia C la curva data da

$$\begin{cases} x = \cosh v \\ z = v \end{cases}$$

dove $\cosh v$ è il *coseno iperbolico.*



La superficie S che si ottiene ruotando la curva C intorno all'asse z si chiama *catenoide.* La curva C si chiama *catenaria*, ed è la curva che si ottiene fissando una *catena* oppure una fune pesante in due punti e lasciandole assumere la forma sotto la forza di gravità. La catenaria è una curva famosa: Galileo pensava fosse una parabola e solo dopo l'invenzione del Calcolo Infinitesimale, Leibniz, Huygens e Johann Bernoulli nel 1691 scoprirono che la sua forma era quella del coseno iperbolico. Il problema di trovare la forma della catenaria era stato



proposto da Jacob Bernoulli.
Eulero dimostrò nel 1744 che ruotando la catenaria si otteneva una superficie particolare, la catenoide, che è un esempio di *superficie minima* e cioè che ha area minima a parità di perimetro (in questo caso il perimetro è formato da *due* circonferenze su piani paralleli con i centri su una retta perpendicolare ai piani) e dimostrò che la catenoide è l'unica superficie di rotazione ad essere una superficie minima. Studieremo le superfici minime più avanti.

La parametrizzazione della catenoide è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = \cosh v \, \cos u \\ y = \cosh v \, \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Esercizio 3.1. Calcolare vettore normale e spazio tangente ad una catenoide e verificare quanto detto sopra sui piani tangenti orizzontali e verticali.

Per maggiori informazioni sulla catenaria, potete consultare
`http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Catenary.html`
oppure
`https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary`
In generale, il sito `http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/` è un ottimo sito per informazioni sulla Storia della Matematica.

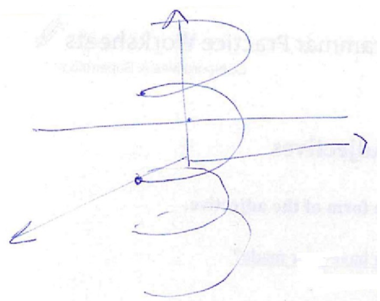
3.2 L'elicoide

Vediamo adesso un esempio di superficie non di rotazione. Questa superficie è quella che intuitivamente possiamo immaginare come una rampa per automobili in un parcheggio.

Si comincia con un'elica circolare, di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = a\sin u \\ z = bu \end{cases}$$

Per ogni punto dell'elica, tracciamo la retta orizzontale che passa per quel punto e incontra l'asse z e cioè la retta fra i punti $(a\cos u, a\sin u, bu)$ e $(0, 0, bu)$.



Usando il parametro v per i punti sulle rette, la parametrizzazione per la superficie è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = av\cos u \\ y = av\sin u \\ z = bu \end{cases}$$

Le linee coordinate sono

- $u =$ costante: è una retta orizzontale, ad altezza $z = bu$ e ad angolo u con la semiretta positiva dell'asse x
- $v =$ costante: è un'elica, di raggio $|av|$ e passo $2\pi b$

Esercizio 3.2. Determinare il dominio U su cui $\mathbf{x}$ è una parametrizzazione regolare (occorre verificare che il rango del differenziale sia 2 e che $\mathbf{x}$ sia iniettiva).

4 La prima forma quadratica fondamentale

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Vogliamo studiare S dal punto di vista "metrico" e cioè vogliamo introdurre una distanza fra i suoi punti. Ovviamente possiamo usare la distanza in $\mathbb{R}^3$ ma vogliamo fare "geometria intrinseca" e cioè rimanendo sulla superficie senza usare lo spazio ambiente. Vogliamo cioè considerare S come uno spazio a se stante e provare a capire che geometria è possibile ottenere. L'esempio tipico è quello della superficie terrestre: la distanza fra due punti sulla Terra non si misura prendendo il segmento che li unisce nello spazio (altrimenti dovremmo scavare un sacco di tunnel!) ma in base alla lunghezza della strada che occorre percorrere per andare da uno all'altro.

Per mettere in prospettiva il problema, analizziamo il caso delle curve: sia dunque C una curva, che possiamo pensare parametrizzata per arcolunghezza. Siano P e Q due punti su C. Qual è la distanza fra P e Q? Se è consentito solo muoversi lungo la curva, c'è un solo modo di andare da P a Q: seguire il percorso della curva. Quindi la distanza fra P e Q è semplicemente la lunghezza dell'arco di curva di estremi P e Q. La parametrizzazione per arcolunghezza $\alpha(s) : I \to C$ è dunque una *isometria* fra l'intervallo I (con la sua distanza indotta dalla distanza sulla retta reale) e la curva: la distanza fra due punti $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ è uguale a $|s_2 - s_1|$ e cioè la stessa dei punti corrispondenti sull'intervallo. Dunque tutte le curve (di ugual lunghezza) sono isometriche fra loro e l'unica geometria di dimensione 1 è quella di un segmento sulla retta $\mathbb{R}$.

Osserviamo che è facile scrivere "fisicamente" una isometria (cioè funzione che non cambia le distanze) fra una curva C qualunque e un segmento: basta pensare a C come un filo di ferro e l'isometria consiste nel "raddrizzarlo". Le distanze non cambiano (perché il filo di ferro non si allunga né accorcia), ma ogni curva diventa un segmento.

Questo ci dice che concetti come "curvatura" e "torsione" non sono invarianti per isometrie di curve, ma solo (come abbiamo dimostrato) per isometrie dello spazio ambiente. Due esseri intelligenti che vivono su due curve diverse e possono solo muoversi all'interno ognuno della propria curva, scoprirebbero la stessa geometria.

La scoperta straordinaria di Gauss fu che questo non è più vero per le superfici: esistono superfici con geometrie diverse. Per esempio, il piano e una qualunque porzione di sfera non sono mai isometriche e anche due sfere di raggio diverso non sono isometriche. Invece i cilindri circolari retti sono (localmente, cioè per porzioni sufficientemente piccole) isometriche al piano: la "curvatura" di un cilindro è illusoria, quella di una sfera è "reale".

Più strano ancora è il fatto che superfici apparentemente molto diverse possono essere isometriche. Vedremo che la catenoide e l'elicoide sono isometriche: due esseri intelligenti che vivono uno sulla catenoide e l'altro sull'elicoide e possono solo muoversi all'interno ognuno della propria superficie, scoprirebbero la stessa geometria.

Invece, due esseri intelligenti che vivono su due sfere di raggio diverso scoprirebbero due geometrie diverse: le formule per lunghezze o aree risultano diverse nei due casi!

4.1 La prima forma

Per definire la distanza fra due punti, possiamo imitare quello che si fa in geometria euclidea, nel piano usuale: la distanza fra due punti è la *lunghezza* del *segmento* che li unisce (e cioè è la lunghezza di una curva) e il segmento è quella curva, fra tutte quelle che uniscono i due punti, che ha la lunghezza *minima*.

Dunque basiamo il concetto di distanza su quello di lunghezza di una curva e poniamo il problema:

> Sia $\alpha : [a, b] \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva. Come si calcola la lunghezza di α?

Questo lo sappiamo:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

Per determinare l'integrando dobbiamo quindi saper calcolare la lunghezza di certi vettori ma osserviamo un fatto fondamentale:

$$\boxed{\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S}$$

perciò dobbiamo saper calcolare la lunghezza dei vettori che stanno negli spazi tangenti alla superficie. Questi spazi tangenti sono spazi vettoriali e per avere il concetto di lunghezza occorre che siano spazi vettoriali *euclidei* e cioè dobbiamo avere un *prodotto scalare* su di essi.

Ricordiamo che un prodotto scalare (su uno spazio vettoriale reale) è una forma bilineare, simmetrica, non degenere, definita positiva. Ad un prodotto scalare è associata una *forma quadratica* e la conoscenza di questa è sufficiente per calcolare le lunghezze.

Sia $p \in S$. Poiché $T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^3_a = \mathbb{R}^3_v$, su T_pS è indotto un prodotto scalare da quello standard di $\mathbb{R}^3$.

Per $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in T_pS$ poniamo

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle \text{ come vettori di } \mathbb{R}^3$$

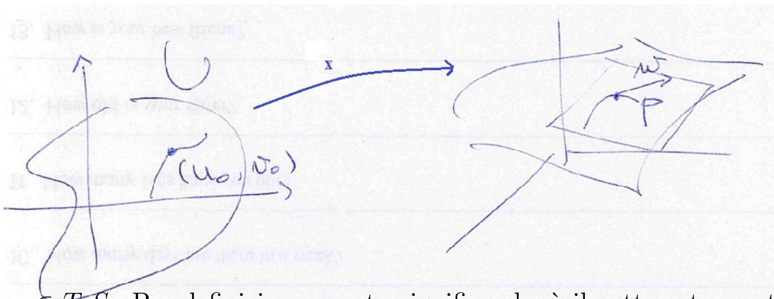
La forma bilineare $\langle -, - \rangle_p$ è un prodotto scalare su T_pS e poniamo:

Definizione 4.1. La forma quadratica associata a $\langle -, - \rangle_p$, data da

$$I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = \|\mathbf{w}\|^2$$

è detta *prima forma quadratica fondamentale* della superficie S in p.

Il significato di questa definizione non è del tutto chiaro perché in fondo stiamo usando il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ e quindi sembra che stiamo usando lo spazio ambiente. Il fatto è che per calcolare la prima forma, basta conoscere la parametrizzazione. Scriviamo i dettagli:



Sia $\mathbf{w} \in T_pS$. Per definizione questo significa che è il vettore tangente di una curva contenuta in S: $\mathbf{w} = \alpha'(0)$, dove $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ e $(u(t), v(t))$ è l'espressione della curva α in coordinate locali. Allora. come abbiamo visto nella scorsa lezione:

$$\mathbf{w} = \alpha'(0) = u'(0)\mathbf{x}_u + v'(0)\mathbf{x}_v$$

e dunque

$$\begin{aligned} I_p(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \left(u'(0)\right)^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \left(u'(0)\right)\left(v'(0)\right) + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \left(v'(0)\right)^2 \end{aligned}$$

Ricordiamo che $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ sono funzioni, calcolate nel punto (u, v). Poniamo, come in figura, $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$ e scriviamo

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p$$
$$F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p$$
$$G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$$

La notazione E, F, G per questi tre prodotti scalari è dovuta a Gauss ed è standard con questo significato dal 1827. Qualunque libro di geometria differenziale leggerete nella vostra vita userà queste lettere con questo significato.

Scrivendo allora la prima forma quadratica nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ si ha: se $\mathbf{w} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$, possiamo scrivere in coordinate $\mathbf{w} = (a, b)$ e

$$I_p(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e cioè la matrice $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ è la matrice della forma quadratica (e anche del prodotto scalare) su T_pS nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

Osserviamo quindi che E, F, G sono tre funzioni differenziabili, definite sul dominio U, facili da scrivere perché coinvolgono solo derivate della parametrizzazione e operazioni algebriche (somme e prodotti). Possiamo pensare alla prima forma quadratica fondamentale I_p in due modi diversi:

1. I_p è, al variare di p, una *famiglia di prodotti scalari* su uno spazio vettoriale fissato di dimensione 2, famiglia che varia in modo differenziabile

2. I_p è, al variare di p, un prodotto scalare sullo spazio vettoriale T_pS e quindi tutte le fibre del fibrato tangente TS diventano spazi vettoriali euclidei, in modo che fibre "vicine" hanno prodotti scalari "vicini" (il prodotto scalare varia in modo differenziabile).

Se il fibrato tangente è banale, le due descrizioni sono equivalenti. Poiché la parte di superficie descritta da una sola parametrizzazione è diffeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^2$, il fibrato tangente è sempre "localmente banale" e quindi le due descrizioni sono localmente equivalenti.

In generale la descrizione corretta è la seconda e per avere un quadro completo quando c'è più di una parametrizzazione, bisognerà capire come cambia la matrice della prima forma al cambiamento di base su TS indotto da un cambiamento di coordinate. Affronteremo questo problema nella prossima lezione.

Vediamo adesso alcuni esempi.

Esempio 4.2. Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il *piano* passante per il punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ e generato dai vettori *ortonormali* $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$$

e derivando si ha:

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1$$
$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$
$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = 1$$

e quindi le funzioni sono costanti. Osserviamo che i vettori tangenti ad un piano sono semplicemente i vettori che stanno sul piano e stiamo dicendo che un vettore $\mathbf{w} = (a, b)$ nella base ortonormale $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ ha lunghezza al quadrato pari a $a^2 + b^2$.

Questo è il teorema di Pitagora, che esprime le lunghezze dei vettori tangenti ad un piano mediante il prodotto scalare standard.

Il primo esempio era ovvio, ma almeno abbiamo trovato un risultato familiare e convincente. Vediamo adesso un altro esempio

Esempio 4.3. Sia S = cilindro circolare retto di asse l'asse z. Possiamo ottenerlo ruotando una retta parallela all'asse z e una parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Lo spazio tangente ha base

$$\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0) \qquad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$$

e quindi $E \equiv 1$, $F \equiv 0$, $G \equiv 1$ e cioè piano e cilindro hanno la stessa prima forma quadratica fondamentale. Vedremo che questo dirà che piano e cilindro sono localmente isometriche.

Esercizio 4.4. Calcolare la prima forma quadratica fondamentale di tutte le superfici che abbiamo visto fino ad adesso (in particolare: sfera, toro, catenoide, elicoide).

4.2 L'elemento di lunghezza

Con i concetti e le notazioni appena introdotte, torniamo al problema di calcolare la lunghezza di una curva. Sia dunque $\alpha : I \to S$ una curva e supponiamo che l'immagine sia tutta contenuta nell'intorno coordinato coperto da una parametrizzazione $\mathbf{x}$. Possiamo allora scrivere

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

dove $(u(t), v(t))$ è l'espressione di α in coordinate locali. Allora

$$\alpha'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v$$

che ha norma (al quadrato)

$$\|\alpha'(t)\|^2 = E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2$$

e dunque la lunghezza della curva è

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2}\, dt$$

Se calcoliamo la funzione "arcolunghezza" abbiamo

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E \cdot (u')^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot (v')^2}\, d\tau$$

e scriviamo
$$s(t) = \int_a^t ds$$
pensando a una funzione come l'integrale del suo differenziale possiamo interpretare ds come l'*elemento di arcolunghezza* (che non si capisce cosa vuol dire). Di solito si scrive questa quantità al quadrato
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$
e "dividendo per dt^2" come avrebbero fatto Leibniz o Eulero, e come faceva Gauss, si ottiene
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \tag{2}$$

ATTENZIONE. La formula (1) è solo un modo di scrivere e non significa niente. Invece la formula (2) ha un significato preciso, ed è vera: esprime la derivata di $s(t)$ rispetto a t per una curva su una superficie in termini della sua espressione in coordinate locali (i termini u' e v') e la geometria della superficie (i termini E, F, G).

La notazione per il ds^2 (che si legge "ds quadro") è molto tradizionale e, se usata in modo opportuno, è molto utile per semplificare i calcoli e le formule. Vedremo come si usa quando faremo le formule per i cambi di coordinate. Trattando il ds^2 come un oggetto "reale" le formule si semplificano e si comportano in modo simile ai cambiamenti di variabile negli integrali (in realtà prima o poi vedremo che sono la stessa cosa).

Esercizio 4.5. In questi tempi di isolamento sociale, è bene avere radici condivise per sentirsi parte, nonostante tutto, di una comunità. Cercate informazioni su tutti i matematici nominati in questa lezione e cercate di avere un'idea della progressione dei loro lavori. Il sito MacTutor è un ottimo posto per cominciare `http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`