Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 10

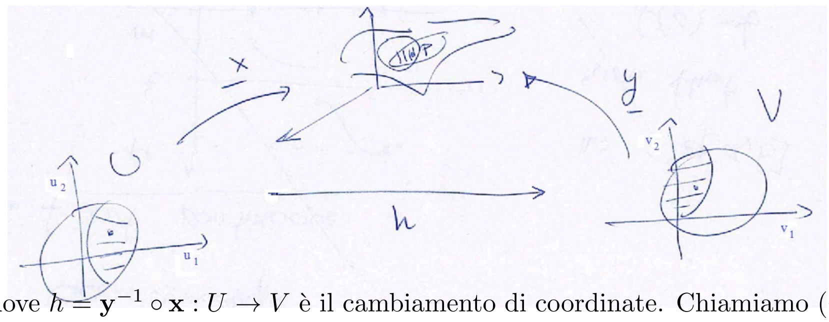
Alberto Albano

In questa lezione continuiamo lo studio della prima forma fondamentale, mostrando come si possano calcolare angoli e aree su una superficie.

Parleremo poi di *orientabilità*. Finora abbiamo studiato le superfici dal punto di vista locale, cioè usando una sola parametrizzazione alla volta e non tutte le parametrizzazioni necessarie per definire una superficie. L'orientabilità è invece un concetto*globale* e vedremo come puè essere definito tramite una condizione di compatibilità sulle parametrizzazioni.

1 Cambiamenti di coordinate

Ritorniamo ai cambiamenti di coordinate su una superficie e ai cambiamenti di base sugli spazi tangenti. La situazione è quella vista in precedenza



dove $h = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} : U \to V$ è il cambiamento di coordinate. Chiamiamo (u_1, u_2) le coordinate su U e (v_1, v_2) le coordinate su V. Usando queste coordinate la funzione h si scrive

$$h(u_1, u_2) : \begin{cases} v_1 = v_1(u_1, u_2) \\ v_2 = v_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

Sullo spazio tangente T_pS ci sono due basi individuate da queste parametrizzazioni, date dai vettori delle derivate parziali e cioè $\{\mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2}\}$ e $\{\mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2}\}$. Consideriamo ora la funzione $\varphi : S \to S$ data dall'identità. Il differenziale $d\varphi_p : T_pS \to T_pS$ è ovviamente l'identità fra questi spazi vettoriali e nella basi indicate avrà come matrice la matrice Jacobiana $J = J(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x})$, come abbiamo dimostrato nella Proposizione 3.2 della Lezione 8.

Questo vuol dire che la matrice Jacobiana del cambiamento di coordinate è la matrice del cambiamento di base sullo spazio tangente. Naturalmente, nessuno sa cosa vuol dire "matrice del cambiamento di base" e in particolare, stiamo scrivendo il *cambiamento di base* o il *cambiamento di coordinate*? (le matrici sono l'inversa l'una dell'altra, ma è difficile ricordarsi chi è chi).

C'è un modo di scrivere molto suggestivo che ci permette di ricordare con esattezza la situazione ed è utile nei calcoli. Prendiamo un vettore tangente $\mathbf{w} \in T_pS$ e scriviamolo nelle due basi

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{x}_{u_1} + a_2\mathbf{x}_{u_2} = b_1\mathbf{y}_{v_1} + b_2\mathbf{y}_{v_2}$$

Si ha $d\varphi_p(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ perché $d\varphi_p$ è l'identità. La scrittura matriciale è

$$d\varphi_p(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Le espressioni a_1, a_2, b_1, b_2 sono delle lettere che rappresentano le coordinate del vettore $\mathbf{w}$ nelle due basi. Possiamo scegliere le lettere che vogliamo. A volte, una notazione suggerisce il significato meglio di un'altra. Scriviamo:

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_{u_1}\, du_1 + \mathbf{x}_{u_2}\, du_2 = \mathbf{y}_{v_1}\, dv_1 + \mathbf{y}_{v_2}\, dv_2$$

e cioè poniamo semplicemente $a_1 = du_1$ e così via. I simboli $du_1, \ldots$ rappresentano numeri e non altro.

Osservate che mettiamo i coefficienti *a destra* del vettore, ma tanto la moltiplicazione fra scalari è commutativa e quindi non importa se li scriviamo prima o dopo. Scriviamo così perché la notazione *suggerisce* un differenziale.

Se adesso interpretiamo i vari du, dv come differenziali, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} dv_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\, du_2 \\ dv_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_2}\, du_2 \end{aligned}$$

che è la stessa espressione scritta sopra. Quindi per ricordarsi la formula giusta basta pensare ai differenziali e usare la notazione solita dell'Analisi.

Vediamo un altro esempio dell'utilità di questa scrittura. I coefficienti della prima forma sono i prodotti scalari dei vettori derivate parziali della parametrizzazione e quindi, quando ne abbiamo due che coprono una parte in comune sulla superficie, dovremmo scriverli in modo diverso. Mantenendo le notazioni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ per le due parametrizzazioni, poniamo

$$E_1 = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle_p \qquad F_1 = \langle \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle_p \qquad G_1 = \langle \mathbf{x}_{u_2}, \mathbf{x}_{u_2} \rangle_p$$

e

$$E_2 = \langle \mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2} \rangle_p \qquad F_2 = \langle \mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2} \rangle_p \qquad G_2 = \langle \mathbf{y}_{v_2}, \mathbf{y}_{v_2} \rangle_p$$

Qual è la relazione fra questi coefficienti? Poiché rappresentano la matrice della stessa forma quadratica scritta in basi diverse, dovrebbero cambiare come cambiano le forme quadratiche e cioè

$$I_1 = M^t\, I_2 M$$

dove la matrice M è una opportuna matrice. M è il cambiamento di base? O il cambiamento di coordinate? Oppure la trasposta va scritta dopo? Qual è la formula giusta: $M = J$, $M = J^{-1}$, $M = J^t$?

Anche qui, la notazione differenziale ci aiuta a ricordare la formula corretta. Scriviamo $\mathbf{w} \in T_pS$ come prima e cioè

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_{u_1}\, du_1 + \mathbf{x}_{u_2}\, du_2 = \mathbf{y}_{v_1}\, dv_1 + \mathbf{y}_{v_2}\, dv_2$$

La prima forma fondamentale dà il quadrato della lunghezza di un vettore e ricordando l'espressione (simbolica)

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

poiché la lunghezza di un vettore non cambia quando si cambia il sistema di coordinate, abbiamo che deve essere

$$E_1\, du_1^2 + 2F_1\, du_1\, du_2 + G_1\, du_2^2 = E_2\, dv_1^2 + 2F_2\, dv_1\, dv_2 + G_2\, dv_2^2$$

o, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} du_1 & du_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dv_1 & dv_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix}$$

Ricordando adesso che

$$\begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$$

e sostituendo, si ha

$$\begin{bmatrix} du_1 & du_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ F_1 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du_1 & du_2 \end{bmatrix} J^t \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ F_2 & G_2 \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix}$$

e cioè

$$I_1 = J^t\, I_2 J$$

dunque nuovamente è la matrice J, la Jacobiana del cambiamento di coordinate, che esprime come cambiano i coefficienti della prima forma.

2 Angoli fra curve

Quando due curve si intersecano nel piano, l'angolo che formano è usualmente definito come l'angolo formato dai vettori tangenti. Usiamo la stessa definizione nel caso di due curve su una superfice.

Siano $\alpha, \beta : I \to S$ due curve regolari tali che $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p \in S$. I vettori tangenti $\alpha'(t_0)$ e $\beta'(t_0)$ appartengono entrambi allo spazio vettoriale T_pS e in questo spazio abbiamo il prodotto scalare dato dalla prima forma I_p nel punto $p \in S$.

Definiamo dunque l'*angolo* θ formato da α e β in p come l'angolo convesso tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(t_0)\|}$$

Il termine a destra dipende solo dalla prima forma. Per esempio, le linee coordinate $u =$ costante e $v =$ costante hanno vettori tangenti rispettivamente $\mathbf{x}_v$ e $\mathbf{x}_u$ e quindi formano un angolo φ dato da

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u\rangle}{\|\mathbf{x}_v\| \cdot \|\mathbf{x}_u\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

e quindi le linee coordinate sono perpendicolari se e solo se $F = 0$.

Esercizio 2.1. Per tutte le superfici incontrate nelle lezioni precedenti e negli esercizi, determinare se e quando le loro linee coordinate sono perpendicolari.

In particolare, dimostrare che su una superficie di rotazione, i meridiani e i paralleli sono sempre ortogonali.

3 Area di una porzione di superficie

Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ sono due vettori, è ben noto dall'algebra vettoriale che il numero

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \sin\varphi$$

dove φ è l'angolo formato dai due vettori, misura l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Sia ora S una superficie e sia $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrizzazione locale. La funzione

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| : U \to \mathbb{R}$$

misura quindi, al variare del punto $q \in U$, l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$.

Con la scrittura differenziale che abbiamo usato nel paragrafo 1, i vettori $\mathbf{x}_u\, du$ e $\mathbf{x}_v\, dv$ sono semplicementi dei multipli dei due vettori di base $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$. Il fatto che i coefficienti si indichino con du e dv può far pensare a multipli "infinitesimali" (questa era l'intuizione di Leibniz). Allora il parallelogramma di lati $\mathbf{x}_u\, du$ e $\mathbf{x}_v\, dv$ sarà un parallelogramma di "area infinitesimale" e sappiamo che per calcolare l'area (così come le lunghezze) si integra il contributo infinitesimale.

Viene quindi in mente di considerare la seguente situazione: sia $Q \subseteq U$ una regione *limitata*. L'ipotesi di limitatezza implica in particolare che la chiusura di Q è un compatto e consideriamo la regione $R = \mathbf{x}(Q) \subseteq S$ sulla superficie S.

L'area di Q è (per definizione)

$$A(Q) = \iint_Q du\, dv$$

se l'integrale esiste. Questa è la prima ovvia ipotesi da fare sulla regione Q. Poiché Q è compatto, se Q è sufficientemente regolare, l'integrale esiste.

Tramite la parametrizzazione $\mathbf{x}$ copriamo la regione R con Q *una volta sola* (perché $\mathbf{x}$ è iniettiva) e quindi ci aspettiamo che l'area di R sia legata all'area di Q da un fattore dato dalla deformazione introdotta da $\mathbf{x}$. Per esempio, se $\mathbf{x}$ è una funzione lineare, questo fattore è dato dal valore assoluto del determinante, come avete visto in Analisi.

Diamo allora la seguente definizione:

Definizione 3.1. Sia S una superficie e sia $R \subseteq S$ una regione limitata contenuta nell'immagine di una parametrizzazione $\mathbf{x} : U \to S$ e sia $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$. Il numero

$$A(R) = \iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv$$

si dice *area* di R

L'integrando è proprio l'area di un parallelogramma infinitesimale. Notiamo che questo parallelogramma infinitesimale sta sul piano tangente (e non sulla superficie) proprio come l'integrando $\|\alpha'(t)\| \, dt$ nella formula della lunghezza di una curva è la lunghezza di un vettore tangente "infinitesimale" $\alpha'(t) \, dt$ che sta sulla retta tangente e non sulla curva.

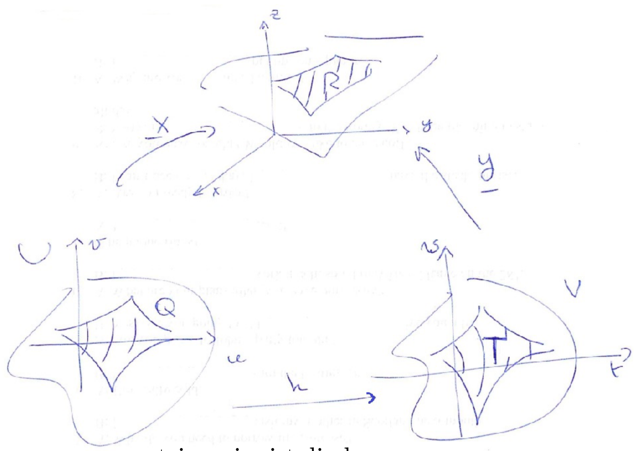
Per come è scritta, l'area di una regione si ottiene dalla parametrizzazione. Dobbiamo dunque dimostrare che non dipende dalla parametrizzazione, proprio come la lunghezza di una curva è una proprietà geometrica che non dipende dalla parametrizzazione. Vale infatti il:

Lemma 3.2. *L'integrale*

$$\iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, dudv$$

è indipendente dalla parametrizzazione.

Dimostrazione. La situazione è:



dove $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono parametrizzazioni tali che

$$R = \mathbf{x}(Q) = \mathbf{y}(T)$$

e cioè $Q = \mathbf{x}^{-1}(R)$ e $T = \mathbf{y}^{-1}(R)$ e come prima $h = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ è il cambiamento di coordinate. La matrice Jacobiana è

$$J = J(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}) = \frac{\partial(w,t)}{\partial(u,v)}$$

Poiché $\mathbf{x} = \mathbf{y} \circ h$, si ha

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_w \frac{\partial w}{\partial u} + \mathbf{y}_t \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_w \frac{\partial w}{\partial v} + \mathbf{y}_t \frac{\partial t}{\partial v}$$

e quindi

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t \cdot \det J$$

Integrando

$$\begin{aligned}\iint_Q \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv &= \iint_Q \|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\| \cdot |\det J| \, du \, dv \\ &= \iint_T \|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\| \, dw \, dt\end{aligned}$$

per la formula di cambiamento di variabile negli integrali doppi e dunque l'espressione per l'area non dipende dalla parametrizzazione. □

Nella formula dell'area l'integrando contiene un prodotto vettoriale e quindi sembra aver bisogno dello spazio $\mathbb{R}^3$ per poter essere definitio e non solo della superficie e della prima forma. Il prossimo esercizio mostra che in realtà l'integrando dipende solo dalla prima forma e quindi è intrinseco alla superficie.

Esercizio 3.3. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ due vettori. Dimostrare che

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2$$

Dunque l'integrando nella formula dell'area è

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_u\|^2 \cdot \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

e dipende solo dalla prima forma fondamentale. Calcoliamo per esempio l'area di qualche superficie.

Esempio 3.4. Calcoliamo l'area della sfera. Usiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

già vista in precedenza. Il dominio di integrazione è Q, dato dalle limitazioni $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, e copre l'intera sfera. Per avere la parametrizzazione iniettiva, dovremmo prendere le disuguaglianze strette, perché prendendole non strette copriamo un meridiano 2 volte. Questo però non cambia l'integrale in quanto una curva (il meridiano) ha misura 2-dimensionale (l'area) nulla.

Le derivate sono

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta &= (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta) \\ \mathbf{x}_\varphi &= (-\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, 0)\end{aligned}$$

e quindi

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = \sin^2\theta$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
A(S^2) &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} |\sin\theta|\, d\theta \right) d\varphi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} |\sin\theta|\, d\theta \right) && \text{l'integrando dipende solo da } \theta \\
&= 2\pi \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) && \text{perché } \sin\theta \geq 0 \text{ per } 0 \leq \theta \leq \pi \\
&= 2\pi \cdot \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} \\
&= 2\pi[1+1] = 4\pi
\end{aligned}
$$

Se il raggio della sfera è R, allora si ha

$$E = R^2, \qquad F = 0, \qquad G = R^2 \sin^2\theta$$

e l'area risulta $4\pi R^2$.

Esempio 3.5. Calcoliamo l'area del toro. Ruotiamo la circonferenza sul piano xz di raggio r con centro il punto $(a, 0, 0)$. La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{cases} x = (a + r\cos v)\, \cos u \\ y = (a + r\cos v)\, \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$$

e il dominio di integrazione è il quadrato $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Calcolando le derivate parziali e i coefficienti della prima forma (esercizio!) si ha

$$E = (a + r\cos v)^2, \qquad F = 0, \qquad G = r^2$$

L'integrando è quindi

$$\sqrt{EG - F^2} = r(a + r\cos v)$$

senza valori assoluti perché entrambi i termini sono sempre positivi e una semplice integrazione mostra che

$$A(T) = 4\pi^2 ra$$

4 Superfici orientabili

Vogliamo adesso introdurre il concetto di orientabilità per una superficie. Per le superfici topologiche abbiamo visto, nel corso di GEOMETRIA DUE, la definizione:

Definizione 4.1. Una superficie topologica si dice *orientabile* se NON contiene un sottospazio omeomorfo ad un nastro di Möbius.

Vogliamo ora analizzare la situazione per superfici differenziabili e cercare una caratterizzazione in termini di parametrizzazioni. La classe di superfici orientabili sarà la stessa che già conosciamo, però i metodi di dimostrazione saranno diversi. Inoltre, siamo interessati non solo al concetto di *orientabilità*, cioè la possibilità di orientare, ma anche al concetto di *orientazione*, cioè alla scelta di un modo di orientare.

Per prima cosa, studiamo il caso degli spazi vettoriali reali. In questo caso la definizione di orientazione è particolarmente semplice, anche se forse non intuitiva a prima vista. Sia V uno spazio vettoriale *reale* di dimensione finita.

Definizione 4.2. Una *orientazione* su V è il dato di una *base ordinata* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Due basi ordinate $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ danno la *stessa orientazione* se la matrice del cambiamento di base (per esempio, scritta rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$) ha determinante *positivo*. Il cambiamento di base è l'applicazione lineare definita da $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \mapsto \mathbf{w}_n$.

Dunque su uno spazio vettoriale sono possibili 2 orientazioni distinte: date due basi, esse determinano la *stessa orientazione* se il determinante è positivo e *orientazioni opposte* se il determinante è negativo.

Osservazione. Il cambiamento di base è un isomorfismo e quindi il determinate è diverso da 0. Inoltre, il fatto che $\mathbb{R}-\{0\}$ sia sconnesso mentre $\mathbb{C}-\{0\}$ no, rende chiaro il motivo per cui orientiamo solo gli spazi vettoriali reali. Le orientazioni corrispondono alle componenti connesse dello spazio degli scalari non nulli.

In dimensione bassa, le due orientazioni possibili hanno nomi ben noti:

$\dim V = 1$: orientazione = verso di percorrenza

$\dim V = 2$: orientazione = verso di rotazione orario o antirorario

$\dim V = 3$: orientazione = regola della mano destra o della mano sinistra

Vediamo il caso $\dim V = 1$: una base è costituita da un solo vettore e quindi se abbiamo due basi $\{\mathbf{v}_1\}$ e $\{\mathbf{w}_1\}$ si ha necessariamente $\mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{v}_1$. Dunque la funzione lineare data da $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{w}_1 = \lambda \mathbf{v}_1$ ha matrice $[\lambda]$ (matrice 1×1) e il determinante è ancora λ. Dunque:

- $\lambda > 0 \implies$ $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *concordi* = le basi danno lo stesso verso sulla retta
- $\lambda < 0 \implies$ $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *discordi* = le basi danno versi opposti sulla retta

Anche il caso $\dim V = 2$ è facile da interpretare: i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ di una base formano un angolo strettamente compreso fra $0°$ e $180°$, perché non sono allineati. Ruotiamo di questo angolo in modo da portare $\mathbf{v}_1$ su $\mathbf{v}_2$: questa rotazione può essere in verso orario o antiorario (le due possibili orientazioni). Se due basi sono collegate da una matrice con determinante positivo, il verso di questa rotazione da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ è lo stesso della rotazione da $\mathbf{w}_1$ a $\mathbf{w}_2$.

Dopo questa digressione sugli spazi vettoriali, torniamo alle superfici e consideriamo $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrizzazione locale che copre, in generale, solo una parte di S. Se $p \in \mathbf{x}(U)$, sullo spazio tangente T_pS c'è la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ e quindi una orientazione.

Osservazione. Data la parametrizzazione $\mathbf{x}(u,v)$, prendiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{y}(u,v) = \mathbf{x}(v,u)$$

e cioè scambiamo le variabili. Allora $\mathbf{y}_u = \mathbf{x}_v$ e $\mathbf{y}_v = \mathbf{x}_u$ e la matrice del cambiamento di base è $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; poiché $\det P = -1$ l'orientazione determinata da $\mathbf{y}$ è l'opposta di quella determinata da $\mathbf{x}$.

In generale, consideriamo la situazione di un cambiamento di coordinate

Il cambiamento di basi sullo spazio tangente ha per matrice la matrice Jacobiana di $h = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$ e quindi:

Proposizione 4.3. *Sia $p = \mathbf{x}(q) = \mathbf{y}(r) \in S$. Le orientazioni su T_pS date dalle basi $\{\mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2}\}$ e $\{\mathbf{y}_{v_1}, \mathbf{y}_{v_2}\}$ sono la stessa se e solo se* $\det J(h)(q) > 0$.

In questo caso diciamo che le parametrizzazioni danno orientazioni compatibili. Il concetto di superficie è allora legato all'esistenza di una famiglia di parametrizzazioni compatibili.

Definizione 4.4. Una superficie regolare S si dice *orientabile* se esiste una famiglia $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ di parametrizzazioni tale che

1. $\bigcup_{i \in I} \mathbf{x}_i(U_i) = S$, e cioè la superficie S è coperta dalla famiglia
2. per ogni $i, j \in I$, posto $h_{ij} = \mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i$, si ha $\det J(h_{ij}) > 0$ in ogni punto del suo dominio, e cioè le orientazioni sono compatibili.

Una famiglia che soddisfa la condizione 1 è stata chiamata *atlante*. Dunque si può dire brevemente che una superficie è orientabile se esiste un atlante con orientazioni compatibili. La scelta di un atlante compatibile si dice *orientazione* della superficie S.

Osserviamo ancora che la condizione di orientabilità è *globale*: dobbiamo conoscere abbastanza parametrizzazioni per coprire tutta la superficie. Una parte potrebbe essere orientabile, ma l'intera superficie no. Un esempio ben noto (da GEOMETRIA DUE) è il piano proiettivo reale (o ogni superficie somma connessa di piani proiettivi): la superficie non è orientabile, ma se prendiamo un disco tutto contenuto all'interno del poligono (senza toccare i lati), questa parte di superficie è omeomorfa ad un disco nel piano e quindi orientabile.

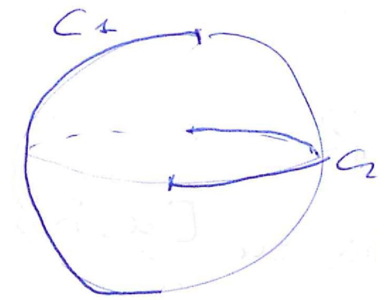
Esempio 4.5. Sia $S = \{z = f(x,y)\}$ il grafico di una funzione. Allora S è orientabile. Infatti S è coperta da una sola parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

e quindi la condizione di compatibilità è automaticamente verificata. In particolare, poiché ogni superficie regolare è localmente un grafico si ha

> ogni superficie regolare è localmente orientabile

Esempio 4.6. Sia S = sfera. La parametrizzazione con le coordinate polari usa 2 parametrizzazioni, ognuna che copre la sfera meno un meridiano.



Abbiamo una sola condizione di compatibilità da verificare, per questa coppia di carte. L'intersezione delle due carte è $S^2 - (C_1 \cup C_2)$ ed è *connessa*. Poiché il cambiamento di coordinate h è una funzione differenziabile, il determinante della matrice Jacobiana è una funzione *continua* e dunque ha segno costante sull'intersezione. Se questo determinante è sempre positivo, allora siamo a posto, altrimenti basta cambiare l'orientazione a una delle due carte scambiando le variabili come nell'Osservazione precedente. Dunque la sfera è orientabile.

Anche in questo caso la dimostrazione ci dà un piccolo enunciato che vale la pena di esplicitare

> ogni superficie regolare che ha un atlante formato da *due* carte con intersezione *connessa* è orientabile

Terminiamo questa lezione spiegando il legame fra l'orientabilità e il campo normale introdotto nella Lezione 9.

Proposizione 4.7 (do Carmo, Proposition 1, paragrafo 2.6)**.** *Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se esiste un campo $N : S \to \mathbb{R}^3$ differenziabile di vettori* normali *e* unitari

Dimostrazione. Supponiamo che S sia orientabile e sia $\{\mathbf{x}_i\}$ un atlante compatibile. Se $\mathbf{x} : U \to S$ è una di queste parametrizzazioni e $p \in \mathbf{x}(U)$, definiamo

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

Questo campo è differenziabile, unitario e normale ed è definito per tutti i punti di $\mathbf{x}(U)$. Supponiamo ora che $p \in \mathbf{y}(V)$, cioè il punto p appartiene all'immagine di *due* parametrizzazioni diverse. Dobbiamo verificare che le definizioni coincidono. Dal calcolo fatto in precedenza (nella definizione di area) per i vettori delle basi date da due parametrizzazioni diverse, si ha

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t \cdot \det J$$

Le parametrizzazioni danno orientazioni compatibili, cioè $\det J > 0$. Allora

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|} \cdot \frac{\det J}{|\det J|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|}$$

e dunque la definizione del campo N non dipende dalla parametrizzazione e quindi è definito per tutti i punti della superficie.

Viceversa, supponiamo adesso di avere un campo $N : S \to \mathbb{R}^3$ differenziabile di vettori *normali* e *unitari*. Consideriamo un qualunque atlante $\{\mathbf{x}_i\}$ che copre S. Possiamo supporre che tutti i domini U_i siano *connessi*. Se un dominio non è connesso, ogni componente connessa del dominio è essa stessa una parametrizzazione (restringendo la funzione alla componente connessa) e quindi otteniamo un altro atlante con i domini connessi.

Sia ora $p_0 \in \mathbf{x}(U)$ un punto fissato. In questo punto abbiamo *due* vettori normali e unitari: $N(p_0)$ (il campo assegnato) e $\dfrac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(p_0)$ (il campo dato dalla parametrizzazione). Poiché sono entrambi normali allo stesso piano tangente T_p in $\mathbb{R}^3$ i due vettori sono paralleli e poiché hanno entrambi norma 1 o sono uguali o sono l'uno l'opposto dell'altro.

Se sono uguali siamo a posto, altrimento basta scambiare le variabili per cambiare il verso del campo dato dalla parametrizzazione e quindi possiamo sempre supporre che nel punto p_0 i due campi sono uguali. Consideriamo adesso, sul dominio U, la funzione

$$g(p) = N(p) \cdot \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(p)$$

data dal prodotto scalare dei due vettori. I vettori sono paralleli e unitari e quindi questa funzione può valere solo 1 oppure -1. Visto che il dominio U è *connesso* e la funzione $g(p)$ è *continua*, deve essere costante. In p_0 si ha $g(p_0) = 1$ e quindi la funzione è costantemente 1, cioè i due vettori sono sempre uguali.

Dopo aver orientato in questo modo tutte le parametrizzazioni, allineando i loro vettori normali secondo il verso dato dal campo N, consideriamo un punto $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ nell'intersezione di due parametrizzazioni. Come prima

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|} \cdot \frac{\det J}{|\det J|}$$

e poiché

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t}{\|\mathbf{y}_w \wedge \mathbf{y}_t\|}$$

deve essere

$$\frac{\det J}{|\det J|} = 1$$

e cioè $\det J > 0$. Questo significa che S è orientabile. □