Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 11

Alberto Albano

Nella risoluzione di questi esercizi useremo spesso le proposizioni dimostrate nelle lezioni 6 e 7 e le due osservazioni fatte all'inizio della lezione 8. Prima di risolvere (o leggere) quello che segue, è bene dunque avere sottomano gli appunti di quelle lezioni.

Esercizio 1. do Carmo, Esercizio 2-2.1

Soluzione. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Il differenziale di questa funzione, nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (2x_0, 2y_0, 0)$$

e quindi i punti in cui non è suriettivo sono i punti di coordinate $(0, 0, z)$ e cioè i punti dell'asse z. In questi punti la funzione vale 0 e perciò l'unico valore critico di f è 0.

Allora 1 è un valore regolare e poiché il cilindro è $f^{-1}(1)$, è una superficie regolare per la Proposizione 2, Lezione 6, pag. 12.

Il cilindro può essere coperto con le due parametrizzazioni regolari:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (\cos s, \sin s, t) \end{aligned}$$

Sono entrambe funzioni differenziabili, con il differenziale di rango massimo in ogni punto e iniettive (verifiche per esercizio).

Esercizio 2. do Carmo, Esercizio 2-2.2

Soluzione. Poniamo

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

X è un disco chiuso (bordo compreso) nel piano $z = 0$ e **non è** una superficie regolare. Consideriamo per esempio il punto $p = (1, 0, 0) \in X$ (si può fare lo stesso ragionamento in un qualunque punto del bordo): se X fosse una superficie regolare, dalla Proposizione 3, Lezione 7, pag. 2, avremmo che esiste un intorno $V \subseteq X$ del punto p che è il grafico di una funzione differenziabile di forma particolare. È chiaro che V non può essere il grafico di una funzione $y = g(x, z)$ oppure $x = h(y, z)$: in questi casi, poiché z è costantemente nullo, il grafico sarebbe una curva e non un intorno di p.

Resta il caso: V grafico di una funzione $z = f(x, y)$. In questo caso f è identicamente nulla, ma il dominio deve essere uguale a V in $\mathbb{R}^2$ e V non è un aperto di $\mathbb{R}^2$.

Sia ora

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$$

Y è un disco aperto nel piano $z = 0$ ed **è** una superficie regolare. Per esempio, ponendo $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ si ha che Y è il grafico della funzione differenziabile $f : V \to \mathbb{R}$ data da $f(u, v) = 0$.

Osservazione. Questo ragionamento dimostra che *ogni* aperto del piano $\mathbb{R}^2$ è una superficie regolare. Infatti, se $V \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, possiamo considerare l'immersione $i : V \to \mathbb{R}^3$ data da $i(u, v) = (u, v, 0)$ e sia $Y = i(V)$ l'immagine. Allora Y è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

Ci sono due modi di vedere Y come superficie regolare:

- Y = grafico della funzione differenziabile $f : V \to \mathbb{R}$ data da $f(u, v) = 0$.
- Y = immagine della parametrizzazione regolare $\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^3$ data da $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$ (osserviamo che $\mathbf{x} = i$).

Esercizio 3. do Carmo, Esercizio 2-2.3

Soluzione. Poniamo

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Usiamo nuovamente la Proposizione 3, Lezione 7, pag. 2: sia $p = (0, 0, 0) \in X$ il vertice del cono. Proiettando sui tre piani coordinati xy, xz e yz, si vede subito che X non è il grafico di una funzione regolare (non può essere il grafico di una funzione perché le proiezioni non sono iniettive) e quindi X non è una superficie regolare intorno a p.

Esercizio 4. do Carmo, Esercizio 2-2.4

Soluzione. Il differenziale di f, nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (0, 0, 2z_0)$$

che si annulla nel punto $p = (0, 0, 0)$ e dunque $f(p) = 0$ non è un valore regolare.

Però

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

e quindi è il piano xy, che è una superficie regolare

Esercizio 5. do Carmo, Esercizio 2-2.5

Soluzione. La risposta è SI. Verifichiamo le tre condizione per una parametrizzazione. La funzione $\mathbf{x}(u,v) = (u+v, u+v, uv)$ è chiaramente differenziabile $\big($condizione ①$\big)$.

Il differenziale è

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$$

e il minore formato dalle righe 2 e 3 ha determinante $u - v$ che è sempre diverso da 0 sul dominio U $\big($condizione ③$\big)$.

Poiché P è un piano, sappiamo già che è una superficie regolare e quindi, per la Proposizione 1.2, Lezione 7, pag. 3, basta verificare che $\mathbf{x}$ è iniettiva. In componenti, la funzione $\mathbf{x}$ è

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u + v \\ z = uv \end{cases}$$

Per scrivere l'inversa, dati y e z dobbiamo trovare u e v. I valori u e v sono due numeri la cui somma è y e il cui prodotto è z e si trovano risolvendo l'equazione di secondo grado $t^2 - yt + z = 0$. Le radici sono $t = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4z}}{2}$ e poiché sappiamo che $u > v$, si ottiene

$$u = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4z}}{2}, \qquad v = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4z}}{2}$$

e abbiamo quindi anche la condizione ②.

Possiamo chiederci se l'espressione sotto radice è sempre positiva. Si ha

$$y^2 - 4z = (u+v)^2 - 4uv = u^2 + 2uv + v^2 - 4uv = (u-v)^2$$

e sul dominio U questa espressione è sempre strettamente positiva e quindi la funzione inversa è differenziabile sull'immagine di U.

Ultima domanda: il dominio U è un semipiano, delimitato dalla retta $u = v$. Qual è la forma dell'immagine? È un semipiano contenuto nel piano P oppure ha un'altra forma? Fare un disegno.

Esercizio 6. do Carmo, Esercizio 2-2.7

Soluzione.

a. Sia $f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$. Per determinare i punti e i valori critici calcoliamo il differenziale: nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (2(x_0+y_0+z_0-1), 2(x_0+y_0+z_0-1), 2(x_0+y_0+z_0-1))$$

che si annulla in tutti i punti del piano $x + y + z = 1$, che sono quindi punti critici. In tutti questi punti la funzione si annulla e dunque 0 è l'unico valore critico.

b. Di conseguenza, l'insieme

$$X_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z-1)^2 = c\}$$

è una superficie regolare per ogni $c > 0$ (per $c < 0$ l'insieme X_c è vuoto). Osserviamo che X_c è l'unione di due piani paralleli

$$x + y + z - 1 = \sqrt{c}, \qquad x + y + z - 1 = -\sqrt{c}$$

e quindi ha due componenti connesse.
c. Poniamo ora $f(x, y, z) = xyz^2$. Il differenziale nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (y_0 z_0^2, x_0 z_0^2, 2x_0 y_0 z_0) = z_0(y_0 z_0, x_0 z_0, 2x_0 y_0)$$

che si annulla in tutti i punti del piano $z = 0$, che sono quindi punti critici. In tutti questi punti la funzione si annulla e dunque 0 è un valore critico.

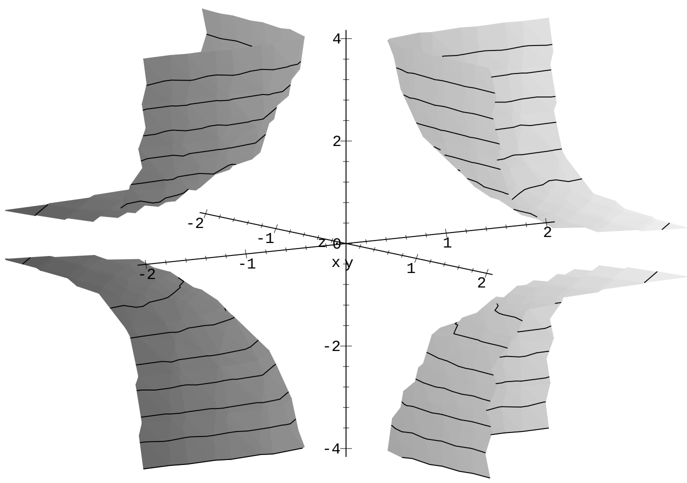
Quando $z \neq 0$, il differenziale si annulla solo per $x = y = 0$ e cioè sull'asse z. Anche questi punti sono critici. La funzione si annulla anche su tutti questi punti e dunque 0 è l'unico valore critico.

Dunque

$$X_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz^2 = c\}$$

è una superficie regolare per ogni $c \neq 0$. Osserviamo che X_c è sconnessa (non ha mai punti sui piani coordinati $x = 0$, $y = 0$ oppure $z = 0$). Determinare quante sono le componenti connesse, al variare di c.

Questa è la superficie per $c = 1$:



Notiamo ancora che X_0 è l'unione dei tre piani coordinati, ed è quindi connessa in quanto unione di connessi con intersezione non vuota (l'origine). Il piano $z = 0$ è però "contato 2 volte".

Gli esercizi seguenti tratti dal paragrafo 2-3 del do Carmo chiedono tutti di dimostrare che certe funzioni sono differenziabili. Ricordiamo la definizione:

Definizione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, $f : S \to \mathbb{R}^n$ una funzione e $p \in S$. La funzione f è differenziabile in p se esiste una parametrizzazione locale $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ con $\mathbf{x}(q) = p$ tale che la funzione $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile in q.

Spesso si può concludere che una funzione è differenziabile usando la seguente (do Carmo, Example 1, pag. 75, riportata anche nella Lezione 8, pag. 1):

Osservazione. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia V un aperto di $\mathbb{R}^3$ tale che $S \subseteq V$. Sia $f : V \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile. Alllora la restrizione di f a S è differenziabile (in ogni punto $p \in S$). Infatti, per ogni parametrizzazione locale $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ la funzione $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile.

Cioè, la restrizione di una funzione differenziabile (definita su un *aperto* di $\mathbb{R}^3$) è differenziabile.

Esercizio 7. do Carmo, Esercizio 2-3.1

Soluzione. Dire che una funzione è un diffeomeorfismo significa che è differenziabile, biunivoca e l'inversa è ancora differenziabile. In questo esercizio, la mappa antipodale $A : S^2 \to S^2$ è la restrizione della mappa $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data dalla stessa formula $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Per prima cosa notiamo che $A^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e quindi $A^{-1} = A$ e in particolare A è biunivoca e lo resta quando ristretta alla sfera S^2. Inoltre A è chiaramente differenziabile su tutto $\mathbb{R}^3$ e quindi concludiamo con l'*Osservazione*.

Esercizio 8. do Carmo, Esercizio 2-3.2

Soluzione. Anche in questo caso la proiezione $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ è la restrizione della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ e dunque π è differenziabile per l'*Osservazione*.

Esercizio 9. do Carmo, Esercizio 2-3.3

Soluzione. In questo caso dobbiamo costruire una coppia di applicazioni differenziabili, inverse l'una dell'altra. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano di equazione $z = 0$. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 &\to S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (x, y, 0) &\mapsto (x, y, x^2 + y^2) \\ \pi : S &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

Le mappe $\mathbf{x}$ e π sono inverse l'una dell'altra. Inoltre $\mathbf{x}$ è differenziabile (ovvio) e π è differenziabile come nell'esercizio precedente in quanto restrizione della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Più in generale, con lo stesso ragionamento si dimostra che

Proposizione. *Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un* aperto *e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il grafico di f. Allora S è una superficie regolare (lo sappiamo)* diffeomorfa ad *U.*

Esercizio 10. do Carmo, Esercizio 2-3.5

Soluzione. Scrivendo $p = (x, y, z)$ e $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ si ha che la funzione $d(p) = \|p - p_0\|$ si scrive

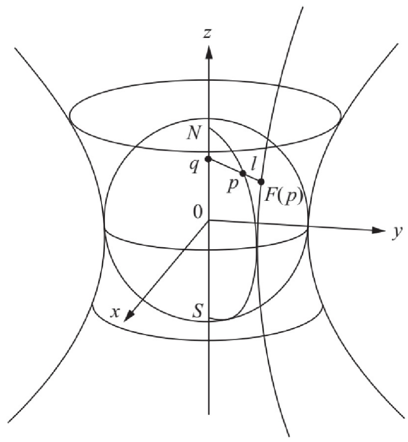
$$d(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

che è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^3$, ma non è differenziabile in p_0. Poiché per ipotesi $p_0 \notin S$, possiamo porre $V = \mathbb{R}^3 - \{p_0\}$ e si ha: $S \subseteq V$ e $d : V \to \mathbb{R}$ è differenziabile. Dunque, sempre per l'*Osservazione*, $d : S \to \mathbb{R}$ è differenziabile in quanto restrizione di una funzione differenziabile.

Osservazione. Avevamo già svolto questo esercizio nella Lezione 8, Esempio 1.2 a pag. 2.

Esercizio 11. do Carmo, Esercizio 2-3.8

Soluzione. Facciamo riferimento alla figura del do Carmo:



La funzione F "apre" la sfera nei poli e la deforma fino ad "adagiarla" sull'iperboloide.

Anche in questo caso, scriviamo la funzione F in coordinate. Sia $p = (x, y, z)$. La proiezione perpendicolare di p sull'asse z è $q = (0, 0, z)$ e poniamo $\mathbf{v} = p - q = (x, y, 0)$. La semiretta ℓ ha equazione parametrica $r = q + t\mathbf{v} = (tx, ty, z)$, con $t \geq 0$. L'intersezione $\ell \cap H$ si ottiene risolvendo l'equazione $(tx)^2 + (ty)^2 - z^2 = 1$. Ricordando che $t \geq 0$ si ha

$$t = \sqrt{\frac{1 + z^2}{x^2 + y^2}}$$

e dunque la funzione F è

$$F(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{1 + z^2}{x^2 + y^2}}\, x, \sqrt{\frac{1 + z^2}{x^2 + y^2}}\, y, z \right)$$

che è differenziabile sull'aperto $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$. Sempre per l'*Osservazione*, $F : S^2 \setminus \{P, N\} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in quanto restrizione di una funzione differenziabile.

Esercizio 12. do Carmo, Esercizio 2-4.2

Soluzione. Per fare questo esercizio è bene leggere l'Esercizio 2-4.1: poiché la soluzione dell'Esercizio 2-4.1 è sul do Carmo, non la riportiamo qui.

In questo caso la superficie può essere vista come il luogo di zeri della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

Il differenziale di questa funzione, nel punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è

$$df_{p_0} = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$$

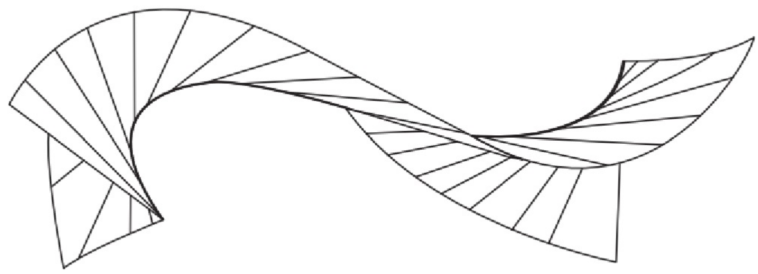
che si annulla solo nel punto $p = (0,0,0)$ e dunque l'unico valore critico è $f(p) = -1$. Dunque la superficie è regolare e nei punti del tipo $(x_0, y_0, 0)$ i suoi piani tangenti hanno equazione:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$$

e sono quindi paralleli all'asse z.

Esercizio 13. do Carmo, Esercizio 2-4.6

Soluzione. La superficie è l'unione di tutte le rette tangenti alla curva α.



La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(t,v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \qquad t \in I, \quad v \neq 0$$

dove il parametro t rappresenta il movimento lungo la curva α e il parametro v è il movimento lungo le rette tangenti. La condizione $v \neq 0$ è indispensabile perché, come vedremo, per $v = 0$ il differenziale $d\mathbf{x}$ non ha rango 2 e quindi la parametrizzazione non è regolare.

La curva $\mathbf{x}(t_0, v)$ è dunque la retta tangente ad α nel punto $\alpha(t_0)$. Poiché $v \neq 0$, questa curva è in realtà l'unione di 2 semirette, date da $v > 0$ e da $v < 0$. Ovviamente le due semirette stanno sulla stessa retta e si uniscono nel punto $\alpha(t_0) \in S$, che però è un punto non regolare della superficie.

Possiamo interpretare la domanda dell'esercizio in due modi: gli *spazi* tangenti sono tutti uguali (e cioè i sottospazi generati da $\mathbf{x}_t$ e $\mathbf{x}_v$) oppure i *piani* tangenti sono uguali e cioè tutti i piani tangenti affini passanti per i punti della curva coincidono. In questo caso è vera l'affermazione più forte e cioè i piani tangenti affini coincidono.

Calcoliamo le derivate parziali della funzione $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_t = \alpha'(t) + v\alpha''(t), \qquad \mathbf{x}_v = \alpha'(t)$$

Si ha

$$\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v = v(\alpha''(t) \wedge \alpha'(t))$$

Ricordiamo la formula della curvatura per parametrizzazioni qualunque:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Per ipotesi la curvatura è sempre non nulla e quindi il vettore $\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{x}_v$ è diverso da zero quando $v \neq 0$ (cioè fuori dalla curva α) e quindi i due vettori sono linearmente indipendenti e la parametrizzazione ha differenziale di rango 2. In particolare il vettore $\alpha''(t)$ è sempre non nullo e lo spazio tangente (generato da $\mathbf{x}_t$ e $\mathbf{x}_v$) è lo spazio generato dai vettori $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$.

La curva $\mathbf{x}(t_0, v) = \alpha(t_0) + v\alpha'(t_0)$ è la retta tangente alla curva α nel punto $\alpha(t_0)$. Da ciò che abbiamo detto è chiaro che, se fissiamo t_0, gli spazi tangenti sono tutti uguali fra loro perché sono sempre lo spazio generato dai vettori $\alpha'(t_0)$ e $\alpha''(t_0)$. Scriviamo allora il *piano* tangente affine: le equazioni parametriche del piano tangente sono

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{x}(t_0, v) + \lambda\mathbf{x}_t(t_0, v) + \mu\mathbf{x}_v(t_0, v) \\ &= \alpha(t_0) + v\alpha'(t_0) + \lambda(\alpha'(t_0) + v\alpha''(t_0)) + \mu\alpha'(t_0) \\ &= \alpha(t_0) + (v + \lambda + \mu)\,\alpha'(t_0) + \mu\alpha''(t_0) \end{aligned}$$

e poiché λ e μ sono parametri arbitrari, abbiamo sempre il piano passante per $\alpha(t_0)$ e parallelo ai vettori $\alpha'(t_0)$ e $\alpha''(t_0)$.

Esercizio 14. do Carmo, Esercizio 2-4.10

Soluzione. La parametrizzazione è

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r\big(\mathbf{n}(s)\cos v + \mathbf{b}(s)\sin v\big)$$

dove $r > 0$ è costante ed è il raggio del tubo intorno alla curva α. La parametrizzazione non è necessariamente iniettiva, in quanto il tubo potrebbe intersecare se stesso (può accadere se il raggio è troppo grande). Per ipotesi comunque assumiamo che $\mathbf{x}$ sia regolare (in particolare iniettiva). Si ha

$$\mathbf{x}_s = \alpha'(s) + r\big(\mathbf{n}'(s)\cos v + \mathbf{b}'(s)\sin v\big), \qquad \mathbf{x}_v = r\big(-\mathbf{n}(s)\sin v + \mathbf{b}(s)\cos v\big)$$

Usando le formule di Frenet per riscrivere $\mathbf{n}'(s)$ e $\mathbf{b}'(s)$ si ha (senza scrivere la dipendenza da s)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \mathbf{t} + r\big((-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})\cos v - \tau\mathbf{n}\sin v\big) \\ &= (-rk\cos v + 1)\mathbf{t} - r\tau\sin v\mathbf{n} + r\tau\cos v\mathbf{b} \\ &= A\mathbf{t} - r\tau\sin v\mathbf{n} + r\tau\cos v\mathbf{b} \\ &= A\mathbf{t} + \tau\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

ponendo per brevità $A = -rk\cos v + 1$. Dunque il prodotto vettoriale vale

$$\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_v = -Ar\sin v\mathbf{b} - Ar\cos v\mathbf{n}$$

e normalizzando si ha la tesi

$$N = \cos v\,\mathbf{n} + \sin v\mathbf{b}$$