Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 12

Alberto Albano

Nel primo paragrafo di questa lezione concludiamo il discorso sull'orientabilità di una superficie. Gli esercizi 1.3 e 1.4 collegano la definizione di orientabilità vista per le superfici regolari con la definizione data per le superfici topologiche in GEOMETRIA DUE e mostrano che le due definizioni sono equivalenti. Per entrambi gli esercizi ci sono suggerimenti ed è importante svolgerli.

La lezione poi inizia lo studio della geometria delle superfici, introducendo una prima nozione di *curvatura*. Nella trattazione, che segue le pagine corrispondenti del do Carmo, ripercorriamo lo studio fatto da Gauss nel suo famoso lavoro "*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" del 1827.

Lo spunto per questo lavoro fu l'incarico di produrre delle carte geografiche per il ducato di Hannover. Gauss ebbe a disposizione le risorse del ducato e fece fare molte misure. Si rese conto che per produrre delle carte accurate occorreva tener conto della differenza fra la superficie terrestre e il piano (il foglio su cui le carte sono disegnate).

Gauss non si accontentò di risolvere il problema nel caso particolare sfera-piano, ma comprese che occorreva studiare il concetto generale di superficie e ottenere una soluzione completa. Lo strumento tecnico che introdusse fu la "mappa di Gauss" e questo sarà anche il nostro principale metodo di studio. I suoi risultati comprendono molti teoremi e segnano l'inizio della "geometria intrinseca", cioè lo studio di uno spazio senza fare riferimento ad uno spazio ambiente. Abbiamo già parlato di questo nella definizione della prima forma fondamentale (anche questa introdotta da Gauss nelle *Disquisitiones*) e in queste lezioni vedremo alcune delle scoperte di Gauss.

Una ultima osservazione: nello stesso numero delle *Commentationes Soc. Reg. Scie. Gottingensis*, la rivista scientifica dell'Università di Göttingen, in cui compaiono le *Disquisitiones*, Gauss pubblicò anche il lavoro in cui introdusse la sua "teoria degli errori", che comprende il metodo dei minimi quadrati e la distribuzione normale (o "Gaussiana") da lui inventati per trattare dati sperimentali, in particolare le misure cartografiche. Questo mostra come nella mente di Gauss non ci fosse distinzione fra matematica "pura" e "applicata", ma solo la "matematica" come strumento intellettuale per la conoscenza.

1 Campi normali e superfici orientabili

Concludiamo la parte generale sui legami fra superfici orientabili e campi normali, dimostrando una ultima proposizione:

Proposizione 1.1 (do Carmo, Proposition 2, paragrafo 2.6)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile, sia $a \in \mathbb{R}$ un valore regolare della funzione f e sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$ la superficie regolare controimmagine di a.*

Allora S è una superficie orientabile.

Dimostrazione. Consideriamo il campo vettoriale "gradiente di$f$" definito nei punti di S da

$$df_p = (f_x(p), f_y(p), f_z(p))$$

Poiché a è un valore regolare questo campo vettoriale è sempre diverso da 0 in quanto almeno una delle tre derivate parziali è diversa da 0. Il campo è anche differenziabile perché f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e quindi lo sono anche le sue derivate.

Sia ora $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva regolare contenuta in S tale che $\alpha(0) = p$ (passante per p). Poiché la curva è tutta contenuta in S, i suoi punti soddisfano l'equazione della superficie e cioè

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \forall\, t \in I$$

Derivando rispetto a t questa funzione identicamente nulla e calcolando per $t = 0$ si ha

$$f_x(p) \cdot x'(0) + f_y(p) \cdot y'(0) + f_z(p) \cdot z'(0) = 0$$

e cioè il vettore df_p è perpendicolare al vettore $\alpha'(0) \in T_pS$.

Poiché $\alpha(t)$ era una curva arbitraria passante per p, lo stesso ragionamento vale *per ogni* curva in S passante per p e quindi df_p è perpendicolare a tutti i vettori tangenti e cioè è perpendicolare allo spazio tangente T_pS. Ma questo vuol dire che df_p è *normale* alla superficie S in p.

Possiamo allora porre

$$N(p) = \frac{df_p}{\|df_p\|}$$

e otteniamo un campo normale, differenziabile e unitario. Dunque S è orientabile. $\square$

Esempio 1.2. Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Allora $\{f = 0\}$ è la sfera di raggio 1 con centro l'origine e quindi la sfera è orientabile. Qual è il campo normale che ottieniamo? Per $P = (x, y, z) \in S$ si ha

$$df_P = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$$

e cioè (normalizzando) $N_f(P) = \overline{OP}$: il campo normale punta nella stessa direzione del raggio (dall'origine verso la superficie della sfera) e cioè punta *verso l'esterno* della sfera.

Poniamo ora $g(x, y, z) = -f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$. Il luogo di zeri non cambia: $S = \{g = 0\}$ ma il campo normale dato da questa nuova equazione è

$$dg_P = (-2x, -2y, -2z) = -2(x, y, z)$$

e normalizzando $N_g(P) = -\overline{OP}$ è l'opposto del campo precedente: $N_g(P)$ punta *verso l'interno* della sfera.

Otteniamo in questo modo le due possibili orientazioni della sfera.

Osservazione. Il ragionamento fatto nell'esempio precedente vale per ogni superficie scritta in forma cartesiana.

Se $S = \{f = 0\}$ allora vale anche $S = \{-f = 0\}$. Se 0 è un valore regolare di f lo sarà anche per $-f$, però le orientazioni sono diverse. In effetti i vettori df_p e $-df_p$ sono entrambi non nulli ma opposti. Otteniamo in questo modo le due orientazioni possibili sulla superficie S.

Possiamo riassumere il ragionamento fatto nell'Esempio e nell'Osservazione dicendo che una superficie orientabile ha un esterno e un interno e il campo normale che dà l'orientazione punta sempre verso l'esterno oppure sempre verso l'interno.

La frase appena detta non è completamente corretta: per esempio, se S è un piano è chiaro che il complementare è formato da due semispazi e i due possibili campi normali puntano in direzione di un semispazio o dell'altro, ma nessuno dei due è l'*interno* o l'*esterno* della superficie.

Non è nemmeno vero che una superficie orientabile sconnette il complementare in due componenti: se S è un disco aperto in un piano, allora il complementare non è sconnesso, però S è orientabile e ci sono chiaramente due orientazioni (andare *da una parte* o *dall'altra* del disco).

Forse il modo più semplice di capire intuitivamente il concetto di orientabilità e di orientazione è dire che:

> una superficie orientabile ha *due facce* e le due orientazioni possibili corrispondono alla scelta di un campo normale che punta sempre dalla parte di una delle facce

In effetti questa frase non è rigorosa (cosa è una faccia?) ed è solo suggestiva, però chiarisce abbastanza bene il concetto ed è vicina al modo comune di parlare.

Per concludere il discorso sull'orientabilità e collegarci al modo di definire l'orientabilità visto in GEOMETRIA DUE restano da dimostrare due fatti:

Esercizio 1.3. *Ogni somma connessa di tori è orientabile.*

Suggerimento. Il modo più semplice è trovare, per ogni superficie di questo tipo, un'equazione cartesiana in modo da poter applicare la Proposizione 1.1. Questo è un problema interessante, non difficile ma di soluzione non immediata.

Abbiamo già visto che la sfera è orientabile. A partire dalle equazioni parametriche del toro si può trovare un'equazione cartesiana (per esercizio, trovare tale equazione che sarà di quarto grado).

È più difficile trovare un'equazione cartesiana per le superfici di genere $g \geq 2$. Infatti queste non sono superfici di rotazione e non ammettono una descrizione semplice tramite parametrizzazioni. Per trovare una equazione cartesiana per una superficie T_g *omeomorfa* ad un toro con g buchi, procedere in questo modo:

1. una equazione per la sfera è $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, che mette in evidenza la simmetria della sfera rispetto al piano xy

2. supponiamo di aver messo T_g in modo simmetrico rispetto al piano xy (è chiaro che questo è possibile, il piano xy taglia "a metà" la superficie) e posizionamoci in un punto del piano. Guardiamo verso l'alto e verso il basso. Cosa vediamo? (questo significa semplicemente: intersechiamo una retta verticale con la superficie T_g)

3. se abbiamo risposto bene alla domanda precedente, abbiamo capito che possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$z^2 = f(x, y)$$

(nel caso della sfera, $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$)

4. trovare allora un'espressione per la funzione $f(x, y)$. Suggerimento: si può scegliere $f(x, y)$ un *polinomio* di grado $2g + 2$

5. dimostrare che la funzione $g(x, y, z) = z^2 - f(x, y)$ ha 0 come valore regolare

Esercizio 1.4. *Il nastro di Möbius non è orientabile.*

Usando la relazione fra orientabilità e campi normali, basta dimostrare che non è possibile trovare un campo normale, differenziabile, unitario

Una dimostrazione della non orientabilità del nastro di Möbius è scritta in dettaglio sul do Carmo, Example 3, pagg. 108-110. Non è il caso di riportare esattamente le stesse parole, perciò leggete direttamente il do Carmo.

Per seguire meglio la dimostrazione del do Carmo, osserviamo che la strategia del ragionamento fatto è:

1. troviamo un atlante che dia la struttura di superficie regolare al nastro di Möbius: l'atlante sul do Carmo è formato da *due* parametrizzazioni

2. mostriamo che questo atlante NON è compatibile, calcolando i determinanti dei cambiamenti di coordinate. NOTA BENE: l'intersezione delle due parametrizzazioni NON è connessa e quindi non possiamo applicare l'osservazione fatta nella Lezione 10 dopo l'Esempio 4.6 a pag. 10

3. adesso supponiamo, per assurdo, che il nastro di Möbius sia orientabile e fissiamo un campo normale unitario che esiste per ipotesi di orientabilità

4. otteniamo una contraddizione studiando il comportamento di questo campo normale rispetto all'atlante descritto in precedenza

Concludiamo questa parte sull'orientabilità osservando che il Paragrafo 2-7 del do Carmo studia in maniera completa l'orientabilità delle superfici chiuse in $\mathbb{R}^3$. Questo paragrafo non è nel programma del corso, ma almeno riportiamo il teorema conclusivo, la cui dimostrazione è piuttosto elaborata e richiede tutti gli argomenti sviluppati nel Paragrafo 2-7.

Teorema 1.5 (do Carmo, THEOREM pag. 116)**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, orientabile e compatta. Allora esiste una funzione differenziabile $g : V \to \mathbb{R}$, definita su un insieme aperto V tale che $S \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ (cioè su un intorno aperto di S in $\mathbb{R}^3$) tale che $S = g^{-1}(0)$ e 0 è un valore regolare di g.*

Dunque una superficie compatta in $\mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se è la controimmagine di un valore regolare e cioè se si può scrivere in forma cartesiana. Per superfici orientabili compatte in $\mathbb{R}^3$ si può anche dimostrare che il complementare ha due componenti connesse (interno ed esterno), ma questo è più difficile e non c'è sul do Carmo.

2 La mappa di Gauss

Cominciamo adesso lo studio della geometria locale su una superficie. Lo strumento principale è la *mappa di Gauss*, che è una funzione differenziabile fra due superfici, definita da Gauss all'inizio del punto 6 delle *Disquisitiones.* La mappa di Gauss ha un contenuto geometrico ma vedremo che è più semplice, per ottenere informazioni sulla superficie, usare il suo *differenziale.* In effetti questo è quello che fa anche Gauss, con un linguaggio non sempre facile da comprendere oggi, ma perfettamente in linea con la terminologia "infinitesimale" usata in Analisi fino all'introduzione del concetto di limite da parte di Cauchy e Weiestrass. Un esempio di questo linguaggio è il modo di scrivere simbolico che abbiamo già usato

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

In questa lezione daremo le definizioni e dimostreremo dei teoremi usando un linguaggio puramente geometrico, senza usare le parametrizzazioni locali. In questo modo i risultati che otterremo non dipenderanno dalle parametrizzazioni, però sarà quasi impossibile calcolare gli invarianti definiti, che perciò potrebbero apparire di poca utilità.

Nella prossima lezione, scriveremo la mappa di Gauss in coordinate locali e troveremo delle semplici formule per il calcolo e quindi otterremo degli strumenti molto efficienti per studiare le superfici.

In un certo senso oggi facciamo *algebra lineare* e cioè studiamo proprietà di applicazioni lineari e forme quadratiche fra spazi vettoriali, mentre nella prossima lezione fisseremo le basi e scriveremo le *matrici* di queste funzioni in basi opportune e vedremo le formule esplicite in coordinate.

Sia S una superficie *orientata*, cioè abbiamo fissato un'orientazione su S. Questo vuol dire che abbiamo un campo vettoriale $N : S \to \mathbb{R}^3$ differenziabile, normale e unitario.

Il campo normale induce una orientazione su tutti gli spazi tangenti nel modo seguente: sia $p \in S$ e sia $N(p)$ il vettore del campo normale in p. Se $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è una base di T_pS si dice che la base è *positiva* se

$$\langle \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, N(p)\rangle > 0$$

Questa condizione significa che il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ha lo stesso verso di $N(p)$. Naturalmente, se la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è positiva, allora la base $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}\}$ sarà *negativa.*

Il campo $N : S \to \mathbb{R}^3$ è unitario, cioè i vettori dell'immagine hanno tutti norma 1. Ricordiamo che quando consideriamo $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale, tutti i vettori sono applicati nell'origine. Questo vuol dire che tutti i punti finali dei vettori $N(p)$ stanno sulla sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1 e cioè la mappa N ha immagine contenuta nella sfera S^2.

Definizione 2.1. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. La mappa

$$N : S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

si dice *mappa di Gauss* di S.

Poiché il campo normale N è differenziabile, possiamo considerarne il differenziale. Se $p \in S$ il differenziale in p è un'applicazione lineare

$$dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2$$

Gli spazi vettoriali T_pS e $T_{N(p)}S^2$ sono entrambi sottospazi vettoriali di dimensione 2 dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e si ha:

Lemma 2.2. *Gli spazi vettoriali T_pS e $T_{N(p)}S^2$ coincidono.*

Dimostrazione. Per definizione di spazio tangente e vettore normale si ha

$$T_p(S) \perp N(p)$$

e cioè lo spazio tangente alla superficie S è il sottospazio perpendicolare al vettore $N(p)$.

Lo spazio $T_{N(p)}S^2$ è lo spazio tangente ad una sfera e questo non è altro che il piano perpendicolare al raggio della sfera che congiunge il centro con il punto di tangenza. Nel punto $N(p) \in S^2$, questo raggio è evidentemente il vettore $N(p)$ (attenzione: stiamo considerando $N(p)$ come vettore in $\mathbb{R}^3$ e anche come punto sulla sfera). Dunque anche

$$T_{N(p)}S^2 \perp N(p)$$

e quindi i due sottospazi sono sottospazi vettoriali di dimensione 2 in uno spazio vettoriale di dimensione 3 perpendicolari allo stesso vettore e perciò coincidono. □

Da questo Lemma si conclude che dN_p è un *endomorfismo* dello spazio tangente T_pS. Se $\mathbf{w} \in T_pS$ è un vettore tangente alla superficie S in p, allora $dN_p(\mathbf{w})$ è ancora tangente alla superficie S in p.

L'applicazione lineare dN_p ha una descrizione puramente geometrica che adesso scriviamo in dettaglio.

Sia $\mathbf{w} \in T_pS$ un vettore tangente. Per definizione, questo significa che esiste una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = \mathbf{w}$$

Per definizione di differenziale di una funzione differenziabile (ricordare la Definizione 3.1 della Lezione 8 a pag. 10 e la discussione subito precedente)

$$dN_p(\mathbf{w}) = \frac{d}{dt}[N \circ \alpha]_{|_{t=0}} = N'(0)$$

Osserviamo che $N \circ \alpha = N(\alpha(t))$ è un campo vettoriale sulla curva $\alpha(t)$: è la restrizione alla curva del campo normale. Il differenziale dN_p misura la variazione del campo N in un intorno di p e in particolare:

$$\boxed{dN_p(\mathbf{w}) = \text{derivata direzionale di } N \text{ nella direzione } \mathbf{w}}$$

Poiché il campo $(N \circ \alpha)(t)$ ha norma costante (uguale ad 1), la sua derivata è perpendicolare al campo stesso e in particolare $N'(0) \perp N(0) = N(p)$ e quindi $N'(0)$, essendo perpendicolare al vettore normale, è tangente alla superficie S in p e questo conferma che $N'(0) = dN_p(\mathbf{w}) \in T_pS$, come previsto dal Lemma 2.2.

Esempio 2.3. PIANO. Sia S data dall'equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$

In ogni punto, il vettore normale è sempre lo stesso ed è parallelo al vettore (a, b, c). Possiamo dunque porre

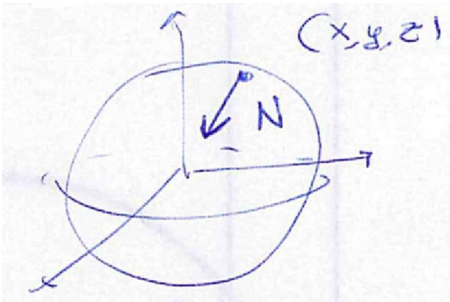
$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$$

Il campo normale è costante e dunque $dN_p = 0$ per ogni $p \in S$. Quindi in questo caso il differenziale della mappa di Gauss è in ogni punto l'endomorfismo nullo del corrispondente spazio tangente.

Esempio 2.4. SFERA DI RAGGIO R. Sia S data dall'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Abbiamo già osservato che in ogni punto il vettore normale è parallelo al raggio corrispondente e cioè è parallelo al vettore (x, y, z). Fissiamo l'orientazione verso l'*interno* della sfera.



Normalizzando si ha

$$N(p) = \frac{1}{R}(-x, -y, -z)$$

Se $\alpha : I \to S$ è una curva sulla sfera, data dalle funzioni $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si ha

$$(N \circ \alpha)(t) = N(t) = \frac{1}{R}(-x(t), -y(t), -z(t))$$

e quindi

$$N'(0) = \frac{1}{R}(-x'(0), -y'(0), -z'(0)) = -\frac{1}{R}\alpha'(0)$$

e cioè

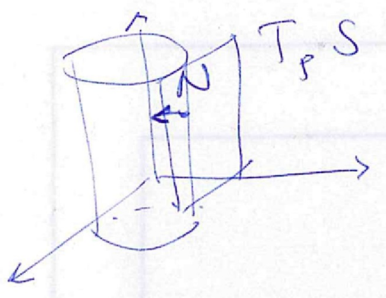
$$dN_p(\mathbf{w}) = -\frac{1}{R}\mathbf{w}$$

e possiamo osservare che:

- dN_p è sempre un multiplo dell'identità. Tutti i vettori sono autovettori di autovalore $-1/R$ e dN_p è diagonalizzabile
- dN_p dipende dal raggio della sfera e quindi sfere di raggio diverso hanno mappe diverse

Esempio 2.5. CILINDRO DI RAGGIO R. Sia S data dall'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Come prima, si può scrivere il campo normale come

$$N(p) = \frac{1}{R}(-x, -y, 0)$$

in quanto N è orizzontale e punta verso l'interno (questa è la nostra scelta dell'orientazione). Se $\alpha : I \to S$ è una curva sul cilinrdo, data dalle funzioni $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si ha

$$(N \circ \alpha)(t) = N(t) = \frac{1}{R}(-x(t), -y(t), 0)$$

e quindi

$$N'(0) = \frac{1}{R}(-x'(0), -y'(0), 0)$$

Sia ora $\mathbf{w} \in T_pS$. Ci sono 2 casi:

- $\mathbf{w}$ è orizzontale (cioè parallelo al piano xy). In particolare la sua terza componente è nulla e quindi $\boxed{dN_p(\mathbf{w}) = -\frac{1}{R}\mathbf{w}}$
- $\mathbf{w}$ è verticale (cioè parallelo all'asse z). In particolare le sue prime due componenti sono nulle e quindi $\boxed{dN_p(\mathbf{w}) = 0}$

Ci sono dunque due autovettori, ortogonali fra loro, di autovalori rispettivamente $-1/R$ e 0. In particolare, anche in questo caso dN_p è diagonalizzabile.

In tutti i casi visti finora, la mappa dN_p risulta diagonalizzabile, con una base di autovettori ortogonali. Questo non è un caso, ma una proprietà generale del differenziale della mappa di Gauss.

Proposizione 2.6. *Il differenziale della mappa di Gauss*

$$dN_p : T_pS \to T_pS$$

è un endomorfismo autoaggiunto *(o* simmetrico*) e cioè*

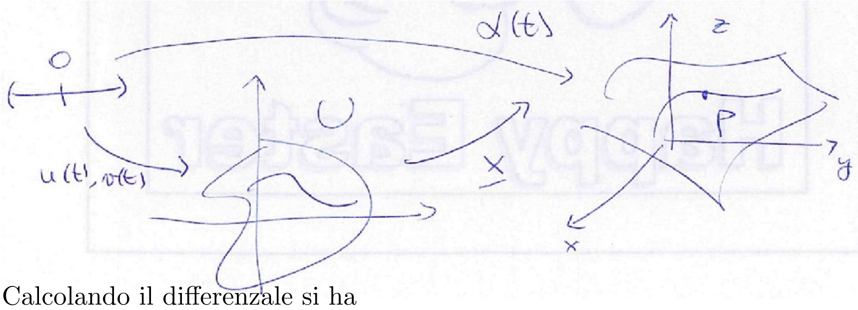
$$\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, dN_p(\mathbf{w}) \rangle, \qquad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS$$

dove $\langle \bullet, \bullet \rangle$ è il prodotto scalare di vettori tangenti dato dalla prima forma fondamentale.

Dimostrazione. Poiché dN_p è lineare e il prodotto scalare è bilineare, basta dimostrare la proprietà richiesta per tutti i vettori di una base.

Sia allora $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrizzazione locale tale che $p \in \mathbf{x}(U)$ e sia $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ la base di T_pS determinata da questa parametrizzazione.

Sia $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva su S scritta in coordinate locali tale che $\alpha(0) = p$.



Calcolando il differenziale si ha

$$dN_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))_{|t=0} = N_u \cdot u'(0) + N_v \cdot v'(0)$$

Per calcolare le immagini dei vettori $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ dobbiamo trovare delle curve che li abbiamo come vettori tangenti. Ma questo è facile: sono le linee coordinate. Ponendo $u(t) = t$, $v(t) = 0$ la curva α corrispondente ha $\mathbf{x}_u$ come vettore tangente e quindi

$$dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u \cdot 1 + N_v \cdot 0 = N_u$$

cioè il vettore derivata parziale del campo N rispetto alla variabile u e calcolato in p. Allo stesso modo, usando l'altra linea coordinata si ottiene anche

$$dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$$

Dunque l'unica uguaglianza da dimostrare è

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle$$

Osserviamo ora che, al variare del punto p sulla superficie S, il vettore N è sempre *normale*, mentre i vettori $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ sono sempre tangenti e quindi i prodotti scalari sono identicamente nulli

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle \equiv 0, \qquad \langle N, \mathbf{x}_v \rangle \equiv 0$$

I campi vettoriali (le funzioni) N, $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ sono funzioni delle due variabili (u, v) e le derivate parziali di questi prodotti scalari saranno quindi identicamente nulle. Si ha cioè:

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle \equiv 0$$
$$\frac{\partial}{\partial u} \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle \equiv 0$$

Dunque

$$\begin{aligned} \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle &= -\langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle \\ &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle \end{aligned}$$

perché le derivate seconde miste sono uguali: $\mathbf{x}_{vu} = \mathbf{x}_{uv}$. $\square$

Dalla teoria degli endomorfismi autoaggiunti e in particolare dal Teorema Spettrale otteniamo dunque che

- dN_p è *diagonalizzabile*
- dN_p ha una *base ortonormale* di autovettori

Questo teorema, così come altri fatti di algebra lineare che useremo in seguito, fanno parte del programma del corso di Geometria UNO. Potete trovare le dimostrazioni in un qualunque libro di algebra lineare. In particolare, facendo riferimento all'Abbena-Fino-Gianella, la definizione di endomorfismo autoaggiunto si trova nel Capitolo 6.6 mentre il Teorema Spettrale è il Teorema 7.9.

Analizzeremo gli autovalori di dN_p nella prossima lezione. Adesso ci occupiamo di un'altra costruzione che si fa con gli endomorfismi autoaggiunti: la forma quadratica associata. Sia $\varphi : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$$

Poiché dN_p è lineare, questa funzione è bilineare e poiché dN_p è autoaggiunto è anche simmetrica. Dunque φ è una *forma bilineare simmetrica* e possiamo definire la forma quadratica associata

$$Q(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$$

Il Capitolo 8 dell'Abbena-Fino-Gianella contiene tutto quello che ci servirà, in particolare le definizioni che si trovano nei paragrafi 8.1 e 8.2. Non faremo molto uso della classificazione delle forme quadratiche perché la dimensione dello spazio T_pS è 2 e quindi tutti i fatti importanti sono molto semplici da dimostrare in questo caso.

Per motivi che saranno chiari in seguito, è meglio cambiare il segno alla forma Q e definiamo

Definizione 2.7. La forma quadratica

$$II_p(\mathbf{v}) = -Q(\mathbf{v}) = \langle -dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$$

è detta *seconda forma (quadratica) fondamentale* di S in p.

Quando abbiamo introdotto la *prima forma*, era chiaro dalla terminologia che ce ne sarebbe stata almeno un'altra. Siamo arrivati adesso alla definizione della *seconda* forma. Ce ne sono altre ancora da definire? No, la geometria di una superficie si descrive mediante la prima e la seconda forma.

Queste due forme quadratiche sono entrambe importanti e descrivono aspetti geometrici diversi: la prima forma descrive la *metrica* sulla superficie ed è legata a concetti quali lunghezza e area. La seconda forma invece descrive la *forma* della superficie intorno ad un punto e permetterà di definire il concetto di "curvatura" per superfici.

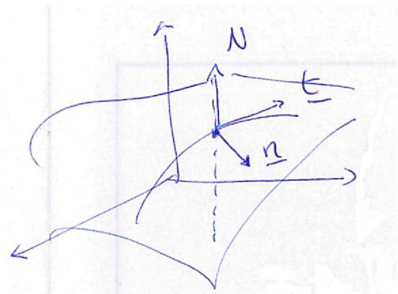
Osservazione. Vedremo più avanti (fra due lezioni) che due superfici sono (localmente) isometriche se e solo se le loro *prime* forme coincidono e quindi la prima forma descrive la geomerica intrinseca.

Invece la *seconda* forma dipende dall'immersione della superficie in $\mathbb{R}^3$, analogamente ai concetti di curvatura e torsione di una curva. Un semplice esempio di superfici localmente isometriche con seconde forme diverse è dato dal piano e dal cilindro: incurvando un foglio di carta (un piano) si ottiene un cilindro e quindi sono localmente isometriche (incurvando non abbiamo cambiato le lunghezze). Però le seconde forme sono diverse: quella del piano è identicamente nulla, quella del cilindro no.

3 La curvatura normale di una superficie

Lasciamo per un momento l'algebra lineare e torniamo alla geometria. Vogliamo definire il concetto di curvatura e sembra naturale partire da ciò che conosciamo già e cioè la curvatura di una curva. Se tracciamo una curva sulla superficie, la sua curvatura dovrebbe dare informazioni sulla forma della superficie. Per esempio, è chiaro che su una sfera non è possibile tracciare curve di curvatura nulla, mentre sul piano e sul cilindro si.

Sia dunque S una superficie regolare, $p \in S$ un punto e sia $p \in C \subseteq S$ una curva sulla superficie passante per p.



Il vettore $\mathbf{t}$ tangente a C in p è tangente alla curva e quindi anche alla superficie, cioè $\mathbf{t} \in T_pS$.

Invece il vettore $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}$ è normale alla curva ma non necessariamente alla superficie. Pensiamo ad un parallelo sulla sfera: è una curva in un piano orizzontale e dunque il vettore $\mathbf{n}$ è orizzontale, mentre il vettore normale $N(p)$ punta verso il centro della sfera e in generale non è orizzontale (lo è solo se il punto p sta sull'equatore).

Ha senso quindi considerare la proiezione di $\mathbf{n}$ su $N(p)$: se $\theta = \widehat{\mathbf{n}N}$ è l'angolo formato dai due vettori, si ha

$$\cos\theta = \langle \mathbf{n}, N \rangle$$

in quanto entrambi i vettori hanno norma 1. Nel punto p c'è anche un valore per la curvatura della curva C: poniamo

$$k = \text{ curvatura di } C \text{ in } p \ = \|\mathbf{t}'\|$$

Definizione 3.1. Il numero

$$k_n = k\cos\theta = k\langle \mathbf{n}, N \rangle = \langle \mathbf{t}', N \rangle$$

viene detto *curvatura normale* di C in p.

Notiamo subito che la notazione è ampiamente insufficiente: la lettera "k" sta per "curvatura" e l'indice "n" sta per "normale". Però questo numero dipende dal *punto* p in cui si calcola e dalla *curva* C che abbiamo usato per la definizione. Dunque anche le lettere p e C dovrebbero comparire per rendere chiaro cosa stiamo facendo. Però di solito non si scrivono e anche noi non le scriveremo. Ricordiamoci solo che per calcolare la curvatura normale occorre fissare *un punto* e *una curva passante per il punto.* Torneremo fra poco su questa questione e giustificheremo meglio perché non è necessario indicare p e C.

Un buon modo per capire il significato della curvatura normale di una curva è il seguente: nel punto p c'è una base di $\mathbb{R}^3$ data da $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ e scriviamo in questa base

$$\mathbf{t}' = (\alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v) + \gamma\, N$$

Se pensiamo ad un punto che si muove sulla curva C, il vettore $\mathbf{t}'$ è l'*accelerazione*, che è parallela alla *risultante delle forze* che agiscono sul punto (seconda legge di Newton). La scrittura precedente è la decomposizione di $\mathbf{t}'$ in componenti *tangenziale* e *normale* alla superficie. La componente normale è data dalle *reazioni vincolari* e cioè dalla forza che costringe il punto a rimanere sulla superficie.

Poiché $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$ si ha

$$k_n = \langle \mathbf{t}', N\rangle = \gamma$$

e quindi la curvatura normale è uguale all'*accelerazione normale*, data dal vincolo di stare sulla superficie. Quindi la curvatura normale di una curva è la parte di curvatura (accelerazione, forza) spiegata dal fatto che la curva è contenuta nella superficie.

Osserviamo anche che la curvatura normale può essere positiva o negativa: il segno dipende dal segno del coseno e quindi dal fatto che l'angolo $\widehat{\mathbf{n}N}$ sia acuto oppure ottuso. In particolare, se questo angolo è retto la curvatura normale è nulla anche se la curvatura della curva non lo è.

Abbiamo discusso il significato geometrico della curvatura normale: è quanto la superficie si "incurva" nella direzione della curva C. È però abbastanza chiaro che è praticamente impossibile calcolare la curvatura normale direttamente dalla definizione: dobbiamo parametrizzare la curva, calcolare i vettori tangente e normale, calcolare la curvatura, calcolare il vettore normale alla superficie e poi mettere tutto insieme.

Fortunatamente, l'algebra lineare ci viene in aiuto: la curvatura normale si calcola tramite la seconda forma. Anzi, la formula che otterremo dirà di più: la curvatura normale non dipende dalla curva scelta, ma solo dal suo vettore tangente.

Proposizione 3.2. *Sia $p \in S$ e sia $\mathbf{v} \in T_pS$ tale che $\|\mathbf{v}\| = 1$. Sia $\alpha(s)$ una curva parametrizzata per arcolunghezza contenuta in S e tale che*

$$\alpha(0) = p, \qquad \alpha'(0) = \mathbf{v}$$

Allora

$$k_n = II_p(\mathbf{v})$$

e cioè la curvatura normale della curva α è uguale al valore della seconda forma calcolata sul suo vettore tangente.

Dimostrazione. Sia N il campo normale della superficie e restringiamo N ad α. Scriviamo dunque

$$N(s) = N(\alpha(s))$$

intendendo che il campo normale ha come variabile indipendente il parametro s arcolunghezza della curva. Osserviamo che, per ogni valore di s

- $\alpha'(s)$ è *tangente* alla superficie S
- $N(s)$ è *normale* alla superficie S

e quindi il loro prodotto scalare è identicamente nullo:

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \qquad \forall\, s$$

Derivando questo prodotto scalare con la regola di Leibniz si ottiene

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$$

Calcoliamo adesso la seconda forma sul vettore $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
II_p(\mathbf{v}) &= II_p(\alpha'(0)) && \mathbf{v} = \alpha'(0) \text{ per ipotesi} \\
&= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle && \text{per la definizione della seconda forma} \\
&= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle && \text{per la definizione di differenziale} \\
&= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle && \text{per l'identità appena vista} \\
&= \langle N(0), k\mathbf{n} \rangle && \text{perché } \alpha \text{ è parametrizzata per arcolunghezza} \\
&= k_n && \text{per la definizione di curvatura normale}
\end{aligned}$$

□

Quindi, data una qualunque curva α passante per p, la sua curvatura normale dipende solo dal *versore* tangente. In particolare, se due curve passano entrambe per il punto p e hanno la stessa *retta tangente*, avranno anche lo stesso versore tangente e quindi si ottiene:

Teorema 3.3 (Teorema di Meusnier, do Carmo, Proposition 2, Capitolo 3-2)**.** *Tutte le curve tracciate sulla superficie S e aventi in un punto p la stessa retta tangente hanno la stessa curvatura normale.*

Una ultima osservazione: sia $p \in S$ un punto fissato. La curvatura normale di S in p è dunque una *funzione* a valori reali che ha per dominio l'insieme dei vettori di norma 1 dello spazio tangente T_pS. Poiché l'insieme di questi vettori è la circonferenza unitaria, la funzione si scrive $k_n : S^1 \to \mathbb{R}$. In questa notazione non mettiamo il punto p (è sottointeso, oppure fissato all'inzio della discussione) e non c'è bisogno di mettere la curva perché dipende solo dal versore tangente, che è la *variabile indipendente* della funzione curvatura normale. Dunque l'espressione corretta è:

per $\mathbf{v} \in T_pS$ di norma 1, il numero $k_n(\mathbf{v}) = II_p(\mathbf{v})$ è la curvatura normale della superficie S *nella direzione del versore* $\mathbf{v}$