Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 13

Alberto Albano

In questa lezione completiamo lo studio del differenziale della mappa di Gauss. Tramite nozioni di algebra lineare, troveremo un legame fra gli autovalori di dN_p e la curvatura normale. Definiremo quindi due importanti funzioni: la *curvatura Gaussiana* e la *curvatura media*. Questo conclude la prima parte dello studio della geometria locale di una superficie.

Nel secondo paragrafo, usando le parametrizzazioni locali scriveremo le matrici di dN_p e della seconda forma II_p in forma esplicita e troveremo delle semplici formule per il calcolo delle varie curvature che abbiamo introdotto. Questo è l'analogo delle formule per calcolare la curvatura e la torsione per parametrizzazioni qualunque e rende effettivo lo studio fatto finora.

Nell'ultimo paragrafo, vedremo esempi di calcolo e svolgeremo parecchi esercizi, simili a quelli che ci sono nei fogli di esercizi assegnati e a quelli del compito.

1 La curvatura gaussiana

Sia S una superficie regolare, $p \in S$ un punto fissato e sia $N : S \to S^2$ la mappa di Gauss. Il differenziale della mappa di Gauss in p è un endomorfismo autoaggiunto

$$dN_p : T_pS \to T_pS$$

e quindi diagonalizzabile, con una base di autovettori ortonormale (Teorema Spettrale). Ricordando che nella definizione di seconda forma c'è un segno *meno*, studiamo l'applicazione lineare $-dN_p$. È ancora un endomorfismo autoaggiunto e poniamo

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale di autovettori di $-dN_p$
- $\{k_1, k_2\}$ gli autovalori corrispondenti

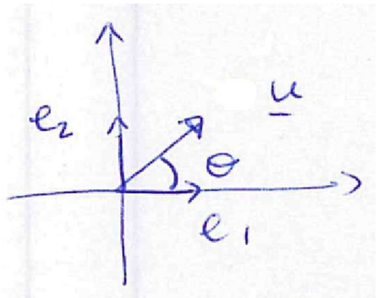
ATTENZIONE. Le funzioni lineari dN_p e $-dN_p$ hanno gli stessi auto*vettori*, ma hanno auto*valori* opposti.

Quindi valgono le uguaglianze

$$-dN_p(\mathbf{e}_1) = k_1\mathbf{e}_1, \qquad -dN_p(\mathbf{e}_2) = k_2\mathbf{e}_2$$

Sia ora $\mathbf{u} \in T_pS$ un vettore tangente di norma 1. Nella base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ si può scrivere

$$\mathbf{u} = \cos\theta\, \mathbf{e}_1 + \sin\theta\, \mathbf{e}_2$$



dove θ è l'angolo formato dal vettore $\mathbf{u}$ con la semiretta positiva individuata dal vettore di base $\mathbf{e}_1$. Calcolando ora la curvatura normale nella direzione di $\mathbf{u}$ usando la seconda forma, come indicato dalla Proposizione 3.2 della Lezione 12, si ha:

$$\begin{aligned}
k_n(\mathbf{u}) &= II_p(\mathbf{u}) = \langle -dN_p(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle && \text{per la Proposizione 3.2}\\
&= \langle -dN_p(\cos\theta\, \mathbf{e}_1 + \sin\theta\, \mathbf{e}_2), \cos\theta\, \mathbf{e}_1 + \sin\theta\, \mathbf{e}_2\rangle && \text{scrivendo } \mathbf{u} \text{ nella base } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}\\
&= \langle k_1 \cos\theta\, \mathbf{e}_1 + k_2 \sin\theta\, \mathbf{e}_2, \cos\theta\, \mathbf{e}_1 + \sin\theta\, \mathbf{e}_2\rangle && \text{per la linearità di } -dN_p\\
& && \text{e la definizione di autovettore}\\
&= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta && \text{sviluppando il prodotto scalare}\\
& && \text{e l'ortonormalità della base } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto

Teorema 1.1 (Formula di Eulero). *La curvatura normale nella direzione di un versore* $\mathbf{u} \in T_PS$ *è data dalla formula*

$$\boxed{k_n(\mathbf{u}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta}$$

dove k_1 *e* k_2 *sono gli autovalori di* $-dN_p$ *e* θ *è l'angolo formato da* $\mathbf{u}$ *e l'autovettore* $\mathbf{e}_1$.

La formula di Eulero non è altro che il calcolo della seconda forma utilizzando una base conveniente, quella formata dagli autovettori di $-dN_p$. Vediamo subito una conseguenza importante.

Abbiamo detto che la curvatura normale è una funzione $k_n : S^1 \to \mathbb{R}$, dove il dominio è l'insieme dei vettori di norma 1 nello spazio tangente T_pS. Poiché la circonferenza S^1 è compatta e la curvatura normale continua, ci saranno massimo e minimo assoluto. L'espressione della formula di Eulero consente il calcolo di questi massimi e minimi semplicemente derivando.

Esercizio 1.2. Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ due numeri reali e supponiamo che $k_1 \geq k_2$. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

Allora la funzione $f(\theta)$ ha massimo nei punti della forma $\theta = n\pi$ e minimo nei punti della forma $\pi/2 + n\pi$.

Osserviamo che se $k_1 = k_2$ allora la funzione $f(\theta)$ è costante e tutti i punti sono di massimo e minimo.

Dunque sulla circonferenza, la curvatura normale ha massimo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, cioè in corrispondenza della direzione di $\mathbf{e}_1$ e minimo per $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, cioè in corrispondenza della direzione di $\mathbf{e}_2$.

Riassumiamo questa discussione nel seguente enunciato:

Proposizione 1.3. *Gli autovalori k_1 e k_2 di $-dN_p$ sono il massimo e minimo valore della curvatura normale. Le direzioni di curvatura normale massima e minima sono date dagli autovettori di $-dN_p$ e sono quindi ortogonali fra loro.*

Osserviamo che la curvatura normale ha una definizione geometrica, in termini di quanto una superficie si incurva in una direzione, mentre k_1 e k_2 hanno una definizione puramente algebrica, in termini di autovalori di una certa funzione lineare. La formula di Eulero lega questi due aspetti: il massimo e il minimo di una funzione definita geometricamente in realtà hanno una caratterizzazione algebrica. Inoltre, la funzione "curvatura normale" è la stessa per tutti i punti di una superficie (e anche per tutte le superfici) ed è completamente determinata dai suoi massimi e minimi.

Diamo ora dei nomi alle quantità che abbiamo studiato. Facciamo cioè un po' di *vocabolario* e riassumiamo tutto in un'unica:

Definizione 1.4 (do Carmo, Capitolo 3-2, Defs. 4 e 6)**.**

- k_1, k_2 si dicono *curvature principali*
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ si dicono *direzioni principali di curvatura*
- $K = k_1 k_2 = \det(-dN_p)$ si dice *curvatura Gaussiana* o *curvatura totale*
- $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(-dN_p)$ si dice *curvatura media*

Ricordiamo che il differenziale della mappa di Gauss dN_p è un'applicazione lineare che non dipende dalle coordinate locali usate per descrivere la superficie: certamente la *matrice* di dN_p dipende dalle coordinate locali, ma il determinante e la traccia dipendono solo dall'applicazione lineare e non dalla base usata per scrivere la matrice.

Dunque le quantità K e H sono delle funzioni a valori reali definite sulla superficie S e quindi *non* dipendono dalle coordinate locali, proprio come la curvatura di una curva.

Ancora un po' di vocabolario: considerando i vari possibili valori di k_1, k_2 e K, si introduce la seguente terminologia

Definizione 1.5. Un punto $p \in S$ si dice:

- *ellittico* se $K > 0$
- *iperbolico* se $K < 0$
- *parabolico* se $K = 0$ e $dN_p \not\equiv 0$
- *planare* se $dN_p \equiv 0$
- *ombelicale* se $k_1 = k_2$

Notiamo che ci sono relazioni fra queste definizioni. Per eempio *planare* $\Longrightarrow$ *ombelicale* oppure *ombelicale* $\Longrightarrow$ *non iperbolico né parabolico.*

Il significato geometrico di questi nomi è facile da capire: sia $P \in S$, sia T_pS il piano tangente affine e sia N il vettore normale in P. Il piano T_pS divide lo spazio in due semispazi e il vettore N punta verso uno di questi semispazi.

Ombelicale significa che la curvatura normale è costante, e cioè la superficie si "incurva" alla stesso modo in tutte le direzioni: per esempio, su una sfera tutti i punti sono ombelicali. Ovviamente tutti i punti di un piano sono *planari.*

Un punto è *ellittico* quando k_1 e k_2 hanno lo stesso segno e poiché sono il massimo e il minimo delle curvature normali, in un punto ellittico la curvatura normale in tutte le direzioni ha sempre lo stesso segno (positivo oppure negativo). Ricordiamo che il segno della curvatura normale in una direzione dipende dal coseno dell'angolo fra il vettore N (che è fisso) e il vettore normale $\mathbf{n}$ di una curva con vettore tangente lungo la direzione assegnata. Quindi in un punto ellittico l'angolo fra N e i vettori $\mathbf{n}$ è sempre acuto oppure sempre ottuso e cioè

> se $p \in S$ è ellittico, c'è un intorno opportuno di p in S tutto *dalla stessa parte* del piano tangente

Per esempio, su un ellissoide tutti i punti sono ellittici.

In un punto *iperbolico*, k_1 e k_2 hanno segno opposto e quindi ci sono direzioni che "curvano" da una parte del piano tangente e altre direzioni che curvano dall'altra:

> il piano tangente in un punto iperbolico attraversa la superficie (tipo la retta tangente in un punto di flesso)

Per esempio, su un iperboloide tutti i punti sono iperbolici.

Possiamo anche dare una interpretazione algebrica in termini di seconda forma. Si ha:

- p è ellittico $\iff$ la forma quadratica II_p è definita (positiva o negativa)
- p è iperbolico $\iff$ la forma quadratica II_p è indefinita
- p è parabolico $\iff$ la forma quadratica II_p è semidefinita (positiva o negativa) ma non nulla
- p è planare $\iff$ la forma quadratica II_p è nulla

Ricordando la classificazione delle forme quadratiche in termini di rango e segnatura, possiamo dire:

- p è ellittico $\iff$ II_p ha segnatura $(2,0)$ oppure $(0,2)$ (e quindi rango 2)
- p è iperbolico $\iff$ II_p ha segnatura $(1,1)$ (e quindi rango 2)
- p è parabolico $\iff$ II_p ha segnatura $(1,0)$ oppure $(0,1)$ (e quindi rango 1)
- p è planare $\iff$ II_p ha rango 0

2 Tutto in coordinate locali

Scriviamo adesso tutte le quantità che abbiamo studiato in coordinate locali. Vedremo che tutto può essere calcolato a partire dalla conoscenza di una parametrizzazione e quindi possiamo sempre capire la geometria attraverso il calcolo differenziale.

Sia quindi S una superficie regolare, $p \in S$ un punto e $\mathbf{x} : U \to S$ una parametrizzazione locale tale che $p \in \mathbf{x}(U)$. Dobbiamo fissare un'orientazione e scegliamo

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

La parametrizzazione $\mathbf{x}$ dà una base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ dello spazio tangente T_pS. Scriveremo adesso tutto in termini di questa base.

Sia $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva su S tale che $\alpha(0) = p$. Abbiamo calcolato (nella dimostrazione della Proposizione 2.6 della Lezione 12) che

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0) \\ dN_p(\alpha'(0)) &= N_u u'(0) + N_v v'(0) \end{aligned}$$

e quindi

$$dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u, \qquad dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$$

Poiché i vettori N_u e N_v sono tangenti, possono essere scritti come

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ N_u &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

(attenzione agli indici!) e cioè: la matrice di dN_p rispetto alla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ è:

$$dN_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ATTENZIONE. L'endomorfismo dN_p è autoaggiunto (o simmetrico) ma la matrice associata rispetto ad una base è simmetrica se la base è ortonormale, altrimenti potrebbe anche non essere simmetrica. Poiché la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ non è in generale ortonormale, allora la matrice di dN_p non è necessariamente simmetrica.

Calcoleremo i coefficienti di questa matrice fra poco. Scriviamo adesso la matrice della seconda forma.

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0)\rangle \\ &= -\langle N_u u'(0) + N_v v'(0), \mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)\rangle \\ &= e \cdot (u'(0))^2 + 2f \cdot u'(0) \cdot v'(0) g \cdot (v'(0))^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu}\rangle \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u\rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv}\rangle \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v\rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv}\rangle \end{aligned}$$

e le uguaglianze scritte vengono di nuova dalla dimostrazione della Proposizione 2.6 della Lezione 12. Osserviamo che in genere è più semplice calcolare le derivate seconde della parametrizzazione che le derivate prime del campo normale (che ha a denominatore una radice quadrata).

Dunque, rispetto alla base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ si ha che:

$$II_p(\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} u'(0) & v'(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}$$

e cioè la matrice $\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ è la matrice della forma quadratica II_p nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

Questa matrice si calcola dunque facendo derivate e operazioni algebriche a partire dalla parametrizzazione, proprio come la matrice della prima forma. È dunque calcolabile esplicitamente in modo immediato.

Osservazione. I coefficienti della prina forma fondamentale si indicano con le lettere E, F, G. Questa notazione è universale ed è stata introdotta da Gauss nelle *Disquisitiones*: di conseguenza, tutti usano queste lettere. Invece la notazione per i coefficienti della seconda forma fondamentale è meno standard. Noi useremo le lettere e, f, g come il do Carmo e l'Abate-Tovena. Altri lettere usate comunemente sono L, M, N (sul libro di Postnikov o sulle note di Hitchin).

A differenza di quello che dicono Abate-Tovena nell'Osservazione 4.5.10 di pag. 195, la notazione e, f, g non è dovuta a Gauss (e forse per questo, non ha lo stessa autorevolezza). Infatti Gauss non parla mai di seconda forma o di endomorfismi autoaggiunti: questi concetti di algebra lineare sono stati introdotti successivamente. Gauss considera tre quantità che sono proporzionali a e, f, g e le usa nello stesso modo nostro. La notazione che usa è però pessima: le quantità si chiamano D, D', D'', non una grande idea perché sembrano derivate prime e seconde. Nelle note della traduzione inglese delle *Disquisitiones* si dice che le quantità e la notazione usate attualmente sono state introdotte da "Italian geometers", probabilmente Francesco Brioschi o Luigi Bianchi, importanti studiosi di geometria differenziale della seconda metà dell'Ottocento.

Calcoliamo ora la matrice del differenziale della mappa di Gauss. Ricordiamo la forma bilineare

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = -\langle \mathbf{v}, dN_p(\mathbf{w})\rangle$$

perché il differenziale della mappa di Gauss è autoaggiunto.

Nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, chiamiamo A la matrice della prima forma (il prodotto scalare che compare qui sopra), chiamiamo B la matrice di φ (e cioè la matrice della seconda forma) e chiamiamo C la matrice di dN_p. In forma matriciale, una forma bilineare si scrive moltiplicando vettori e loro trasposti e l'uguaglianza precedente diventa

$$\mathbf{v}^t \cdot B \cdot \mathbf{w} = -\mathbf{v}^t \cdot A \cdot (C\mathbf{w}) = -\mathbf{v}^t \cdot (A \cdot C) \cdot \mathbf{w}$$

e poiché questa equazione deve valere per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, deve essere

$$B = -A \cdot C$$

La matrice A è la matrice di un prodotto scalare e quindi è invertibile. Si ha dunque

$$-C = A^{-1} \cdot B$$

Dunque nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ la matrice si scrive come

$$\boxed{-dN_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}}$$

e quindi anche questa matrice si ottiene dalla parametrizzazione $\mathbf{x}$ facendo derivate e operazioni algebriche.

Da questa relazione otteniamo subito (usando il Teorema di Binet sul determinante del prodotto di matrici) l'espressione per la *curvatura Gaussiana*

$$\boxed{K = \det(-dN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$$

che è di gran lunga l'espressione più semplice per calcolare la curvatura Gaussiana.

La curvatura media è un po' più laboriosa da calcolare, perché la traccia di un prodotto non si scrive facilmente in termini delle tracce delle due matrici. Calcolando esplicitamente la matrice inversa (è solo una matrice 2×2), moltiplicando e prendendo la traccia si ottiene la formula

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(-dN_p) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}}$$

Esercizio 2.1. Svolgere i calcoli indicati e verificare che la formula per H è corretta.

Possiamo ancora osservare che le curvature principali k_1 e k_2 sono gli autovalori di dN_p e quindi soddisfano le condizioni

$$k_1 k_2 = K, \qquad k_1 + k2 = 2H$$

e sono quindi le radici dell'equazione

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$$

Naturalmente, si può anche scrivere la matrice di $-dN_p$ e calcolarne gli autovalori. Le direzioni di curvatura sono gli autovettori e si calcolano facilemte (ricordiamoci che si tratta di matrici 2×2 e tutti i conti sono semplici).

3 Esempi

Esempio 3.1. PIANO. In questo caso è tutto banale. Sia S il piano passante per p_0 e generato dai vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. Possiamo prendere $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ di norma 1 e ortogonali

Una parametrizzazione (che copre tutto il piano) è

$$\mathbf{x}(u, v) = p_0 + u\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2$$

Le derivate parziali sono

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1, \qquad \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2$$

e quindi la matrice della prima forma è

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = 1 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0 \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 = 1 \end{aligned}$$

Il campo normale (la mappa di Gauss) è dato da

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2\|} = \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$$

che è costante e quindi il suo differenziale è $-dN_p = 0$ in ogni punto. Calcolando la seconda forma, le derivate parziali $N_u = N_v \equiv 0$ e quindi II_p è la forma identicamente nulla.

Perciò

$$K \equiv 0, \qquad H \equiv 0$$

curvatura Gaussiana e media sono identicamente nulle e tutti i punti sono *planari* (non una grande sorpresa) e quindi anche *ombelicali.*

Esempio 3.2. SFERA. Abbiamo calcolato nella Lezione 12 che

$$dN_p = -\frac{1}{R}\,\mathrm{id}$$

è un multiplo scalare dell'identità di T_pS. Allora la matrice è

$$-dN_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

(un multiplo dell'identità ha matrice multipla della matrice identità *in ogni base*) e quindi

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}, \qquad K = \frac{1}{R^2}, \qquad H = \frac{1}{R}$$

Quindi tutti i punti sono *ellittici* e *ombelicali.*

Si può dimostrare (vedi do Carmo, Capitolo 3-2, Proposition 4) che se tutti i punti della superficie S sono ombelicali, allora S è (parte di) un piano o una sfera. Questo è l'analogo in dimensione 2 del fatto che una curva piana con curvatura costante è una retta oppure una circonferenza.

Esempio 3.3. TORO. Prendiamo la parametrizzazione

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{cases} x = (a + r\cos v)\,\cos u \\ y = (a + r\cos v)\,\sin u \\ z = r\sin v \end{cases}$$

È immediato calcolare le derivate parziali $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$ (farlo per esercizio!!). Calcolando i prodotti scalari si ottiene la prima forma

$$E = (a + r\cos v)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

Si ha, come abbiamo calcolato (Esempio 3.3 della Lezione 10, pag. 6)

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = r(a + r\cos v)$$

dove il valore assoluto non serve perché l'argomento è sempre positivo (abbiamo già fatto tutto questo calcolo nell'Esempio 3.5 della Lezione 10, pag. 7).

Dunque

$$e = N \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{r(a + r\cos v)} \langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle$$

Calcolando il prodotto misto (e in modo analogo gli altri coefficienti) si ha:

$$e = \cos v(a + r\cos v), \quad f = 0, \quad g = r$$

e dunque

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r\cos v(a + r\cos v)}{r^2(a + r\cos v)^2} = \boxed{\frac{\cos v}{r(a + r\cos v)}}$$

Il denominatore è sempre positivo (perché $a > r$) e quindi il segno è dato dal numeratore. Il parametro v è l'angolo sulla circonferenza "verticale" che facciamo ruotare per ottenere il toro. Il coseno è positivo nel primo e quarto quadrante e negativo nel secondo e terzo. Dunque la curvatura Gaussiana del toro è

- *positiva* per i punti sull'esterno del toro $\longrightarrow$ punti ellittici
- *negativa* per i punti sull'interno del toro $\longrightarrow$ punti iperbolici
- *nulla* per i punti sulle circonferenze superiore e inferiore $\longrightarrow$ punti parabolici

Esercizio 3.4. Leggere la risoluzione dettagliata del primo esercizio del foglio "Esercizi su prima e seconda forma" che trovate su Moodle nella Lezione 13 e svolgere gli altri esercizi in modo simile.

In modo simile, svolgere tutti gli esercizi numero 2 dei compiti d'esame degli anni 16/17 e 17/18 e numero 3 dei compiti dell'anno 18/19.