Università degli studi di Torino

Corso di Studi in Matematica

Geometria 3 – a.a. 2019/20

Lezione 14

Alberto Albano

In questa lezione diamo una dimostrazione del *Theorema Egregium* di Gauss, che afferma che la curvatura Gaussiana di una superficie è invariante per isometrie.

La trattazione è molto simile a quelle che si trovano sul do Carmo (Capitolo 4-2 per la isometrie, Capitolo 4-3 per il teorema di Gauss), sull'Abate-Tovena (Capitolo 4.1 per le isometrie, Capitolo 4.6 per il teorema di Gauss) e sul Postnikov (Lezione 3, in particolare Definizione 6 e Proposizione 1 per le isometrie, Lezione 5 fino al Teorema 1 per il teorema di Gauss).

Nel primo paragrafo diamo la definizione di metrica su una superficie a cui abbiamo spesso accennato e studiamo le isometrie fra superfici. In particolare studiamo la relazione fra isometrie e prima forma fondamentale. Questa è l'idea originale di Gauss, che studiò a fondo il concetto di metrica sulle superfici e si rese conto che le superfici, a differenza delle curve, possiedono "geometria intrinseca", cioè proprietà che non variano anche se cambia l'immersione nello spazio.

Nel 1854 Bernhard Riemann scrisse la sua famosa tesi di abilitazione *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria).* Sviluppando un tema proposto da Gauss, Riemann rivoluzionò le concezioni geometriche del tempo e generalizzò il lavoro di Gauss in tutte le dimensioni. Introdusse le *varietà differenziabili* e la struttura metrica su di esse, fino alla definizione del *tensore di Riemann* che è l'estensione a tutte le dimensioni del concetto di curvatura Gaussiana. Vedrete un primo esempio di studio di geometria riemanniana l'anno prossimo nel corso di Meccanica Razionale e poi più a fondo nei corsi di Geometria della Laurea Magistrale.

1 Isometrie e prima forma fondamentale

Scopo di questo primo paragrafo è definire una metrica su una superficie regolare, definire le isometrie fra superfici e infine mettere in rilievo l'importanza della prima forma fondamentale nello studio delle isometrie fra superfici.

Sia S una superficie regolare. Poiché $S \subseteq \mathbb{R}^3$, che è uno spazio metrico, anche S ha una metrica, indotta da quella di $\mathbb{R}^3$.

In $\mathbb{R}^3$ la distanza fra due punti p, q è la lunghezza del segmento $\overline{pq}$ e quindi è la lunghezza minima di tutti i cammini che uniscono i due punti. Se adesso consideriamo $p, q \in S$, la distanza nella metrica indotta è la stessa (lunghezza del segmento $\overline{pq}$) ma in generale non c'è un cammino in S che ha quella lunghezza e in effetti questo capita se e solo se il segmento $\overline{pq}$ è contenuto nella superficie.

Non c'è più dunque il significato di "distanza" come "minima lunghezza di un cammino". Per ritrovare questa corrispondenza dobbiamo definire una nuova distanza su S, che dipenda solo dai punti di S e non dallo spazio ambiente e che dia quindi una *geometria intrinseca*.

Si può procedere nel modo seguente: per ogni $p, q \in S$ poniamo

$$d_S(p,q) = \inf_C \{\ell(C)\}$$

dove $\ell(C)$ = lunghezza dell'arco di curva C e l'estremo inferiore è preso sull'insieme di tutte le curve su S regolari a tratti (cioè con un numero finito di punti singolari) che uniscono p e q.

Proposizione 1.1. *d_S è una distanza su S.*

Dimostrazione. La funzione d_S è simmetrica perché i cammini da p a q sono gli stessi di quelli da q a p percorsi in senso inverso e quindi la lunghezza non cambia.

Poiché $d_S(p,q) \geq \|q - p\|$ (dove $\|q - p\|$ è la distanza euclidea in $\mathbb{R}^3$), si ha anche che $d_S(p,q) \geq 0$ ed è nulla se e solo se $p = q$.

Siano p, q, r tre punti e siano C una curva da p a q e D una curva da q a r. Allora la curva $C + D$ (ottenuta percorrendo prima C e poi D) è una curva che unisce p a r ed è ancora regolare a tratti perché ha al più un punto singolare in più rispetto a quelli di C e D. Questo mostra che le curve che uniscono p a r passando per q fanno parte dell'insieme su cui si prende l'inf per calcolare $d_S(p,r)$ e quindi $d_S(p,r) \leq d_S(p,q) + d_S(q,r)$. Dunque d_S soddisfa anche la diseguaglianza triangolare ed è quindi una distanza. □

Definizione 1.2. La funzione d_S si chiama *distanza intrinseca* su S.

Useremo questo nome quando la vogliamo confrontare con la distanza su S indotta da $\mathbb{R}^3$ altrimenti la chiameremo semplicemente distanza.

Esempio 1.3. Se S è una sfera, la distanza intrinseca $d_S(p,q)$ è la lunghezza dell'arco di cerchio massimo che unisce P e Q. La distanza intrinseca è quella usata in "geografia" e dà la distanza fra due punti sulla superficie della terra.

La distanza indotta da $\mathbb{R}^3$ corrisponde a scavare un "tunnel" che unisce in linea retta i due punti sulla superficie (il segmento $\overline{pq}$).

Esempio 1.4. Non sempre esiste un cammino di lunghezza uguale alla distanza intrinseca e cioè non sempre l'estremo inferiore è un minimo. Sia $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ il piano meno un punto (in questo esempio senza l'origine). S è una superficie regolare perché è un aperto in una superficie regolare, il piano. Se prendiamo i punti $p = (1,1)$ e $q = (-1,-1)$, è possibile trovare cammini di lunghezza arbitrariamente vicina a $2\sqrt{2}$, che è la lunghezza del segmento da p a q: basta prendere la diagonale, togliere il segmento da $(\varepsilon, \varepsilon)$ a $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ e sostituirlo con una semicirconferenza di centro l'origine e raggio $\varepsilon\sqrt{2}$ (fare un disegno!!). Quindi $d_S(p,q) = 2\sqrt{2}$. Però l'unico cammino nel piano di lunghezza esattamente $2\sqrt{2}$ è il segmento da p a q, che non è contenuto in S.

In questo caso, la distanza intrinseca e la distanza indotta dall'ambiente coincidono e cioè per ogni coppia di punti $p, q \in S$ vale

$$d_S(p, q) = \|q - p\|$$

però in S non sempre esistono i cammini di minima lunghezza.

Con la distanza intrinseca S diventa uno spazio topologico e una delle condizioni che S sia una superficie regolare è esattamente che questa topologia sia la stessa che ha come sottospazio di $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea (ricordiamo che metriche diverse possono indurre la stessa topologia).

Esempio 1.5. Cosa capita se diamo la definizione di distanza intrinseca per i punti di una *curva* C? Dati due punti p e q, c'è un solo cammino sulla curva che li unisce ed è esattamente l'arco della curva da p a q. Dunque la distanza intrinseca fra due punti è la lunghezza dell'arco di curva che li unisce e cioè l'*arcolunghezza*.

Vogliamo ora definire il concetto di *isometria* fra superfici. Di solito un'isometria è una funzione che conserva le distanze fra i punti. Poiché la distanza fra due punti su una superficie è definita usando le lunghezze delle curve che congiungono i due punti appare ragionevole definire il concetto di isometria mediante la lunghezza delle curve. Diamo quindi la seguente:

Definizione 1.6. Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo fra le superfici M e N. f è una *isometria* se per ogni curva C tracciata su M si ha

$$\ell(C) = \ell(f(C))$$

dove $f(C)$ è la curva su N immagine mediante f di C e $\ell(C)$ è la lunghezza della curva C.

Osserviamo che l'ipotesi che f sia un diffeomorfismo è essenziale: f induce una biiezione fra gli insiemi delle curve su M e su N. In questo modo, una isometria secondo questa definizione conserva le distanze fra i punti.

La condizione non è comunque troppo restrittiva in quanto una funzione che conserva le distanze è sempre iniettiva (perché?) e quindi biiettiva con la sua immagine. La vera restrizione è che chiediamo che l'inversa sia ancora differenziabile e cioè che il differenziale df_p sia invertibile in ogni punto.

Esempio 1.7. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per arcolunghezza e sia $C = \alpha(I)$ la sua immagine. Supponiamo che α sia iniettiva. Allora α è una isometria fra il segmento I (con la sua metrica euclidea standard) e la curva C con la distanza intrinseca.

Dunque ogni curva (non chiusa) è isometrica ad un segmento e due segmenti sono isometrici se e solo se hanno la stessa lunghezza. Perciò, a meno di isometrie, le curve della stessa lunghezza sono tutte "uguali" fra loro.

Possiamo esprimere questo fatto dicendo che le curve non hanno geometria intrinseca oppure che l'unica geometria di dimensione 1 è quella dei segmenti di retta euclidea.

Vediamo quindi che curvatura e torsione di una curva non sono concetti intrinseci, ma dipendono dall'immersione della curva nello spazio: curve isometriche possono avere curvatura e torsione differenti.

Osservazione. Se C è una curva nello spazio, è facile immaginare l'isometria con un segmento: pensiamo a C realizzata con un filo di ferro e "raddrizziamo il filo". Questa è una isometria perché non cambiamo le distanze: il filo di ferro non è un elastico!

Torniamo al caso delle superfici e analizziamo il significato della definizione di isometria scrivendo il diffeomorfismo f in coordinate locali: siano $D \subset \mathbb{R}^2$ e $E \subset \mathbb{R}^2$ due aperti connessi del piano. Indicheremo con (u_1, v_1) le coordinate in D e con (u_2, v_2) le coordinate in E.

Siano ora $\mathbf{x} : D \to M \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} : E \to N \subset \mathbb{R}^3$ due parametrizzazioni regolari. La funzione $f : M \to N$ induce (in modo unico, poiché $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono biiettive sulle loro immagini) una funzione $\bar{f} : D \to E$, data da $\bar{f} = \mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$, che scriviamo in coordinate come:

$$\bar{f}(u_1, v_1) = (u_2(u_1, v_1), v_2(u_1, v_1))$$

Il diagramma è

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ D \arrow[u, "\mathbf{x}"] \arrow[r, "\bar{f}"'] & E \arrow[u, "\mathbf{y}"'] \end{tikzcd}$$

e poiché f è un diffeomorfismo, anche $\bar{f}$ lo è.

Facciamo ora un'osservazione importante che semplificherà molto i calcoli successivi. La matrice del differenziale df_P dipende ovviamente dalle parametrizzazioni $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ che usiamo per descrivere le superfici M e N.

Lemma 1.8. *Se f è un diffeomorfismo, è sempre possibile effettuare un cambiamento di coordinate (e cioè cambiare le parametrizzazioni locali) in modo che la matrice di df_p sia la matrice unità, identicamente in p.*

Dimostrazione. Nel diagramma commutativo precedente, $\bar{f}$ è un diffeomorfismo e può essere interpretato come un cambiamento di coordinate. Il diagramma può essere allora riscritto come:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ & E \arrow[u, "\mathbf{y}"'] \\ D \arrow[uu, "\mathbf{x}"] \arrow[r, "\bar{g}=\mathrm{id}"'] & D \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

In queste nuove coordinate, le parametrizzazioni sono $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y} \circ \bar{f}$ e f è rappresentata da $\bar{g}$ cioè l'identità. Quindi in queste coordinate si ha in ogni punto $p \in M$:

$$df_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Osservazione. Ricordiamo che la matrice di un'applicazione lineare dipende dalle basi usati negli spazi vettoriali dominio e codominio. Se si cambiano le due basi in modo indipendente, la nuova matrice è legata alla vecchia da una formula del tipo

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot Q$$

dove P e Q sono le matrici dei cambiamenti di base e sono matrici *diverse*. Si può quindi trasformare B in modo radicale, molto di più di quanto si trasformi la matrice di un endomorfismo, dove di solito si fa lo stesso cambiamento di base nel dominio e nel codominio.

Per la matrice del differenziale di una funzione differenziabile, le basi che si usano negli spazi tangenti sono quelle date della parametrizzazioni locali. Nella dimostrazione del lemma precedente, si lascia invariata la base del dominio e si cambia quella del codominio. Sfruttando il fatto che B (la matrice di $d\bar{f}_P$) è invertibile, si ottiene il risultato voluto prendendo $Q = \mathrm{id}$ (la base non cambia nel dominio) e $P = B$ (si prendono i vettori immagine di B come base nel codominio).

Sugli spazi vettoriali T_pM e $T_{f(p)}N$ ci sono dei prodotti scalari, dati dalle prime forme fondamentali delle due superfici e sono quindi *spazi vettoriali euclidei*. Vogliamo studiare sotto quali condizioni il differenziale df_P sia un'isometria di spazi vettoriali. Sia dunque

$$\mathbf{v} = a\mathbf{x}_{u_1} + b\mathbf{x}_{v_1} \in T_pM$$

e

$$df_p(\mathbf{v}) = c\mathbf{y}_{u_2} + d\mathbf{y}_{v_2} \in T_{f(p)}N$$

la sua immagine. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= E_1a^2 + 2F_1ab + G_1b^2 \\ \|df_p(\mathbf{v})\|^2 &= E_2c^2 + 2F_2cd + G_2d^2 \end{aligned}$$

dove E_1, F_1, G_1 sono i coefficienti della prima forma fondamentale di M e E_2, F_2, G_2 sono i coefficienti della prima forma fondamentale di N. Se scegliamo coordinate locali $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ come nel lemma allora $a = c$ e $b = d$ perché il differenziale di df_p è rappresentato dalla matrice unità e quindi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= E_1a^2 + 2F_1ab + G_1b^2 \\ \|df_p(\mathbf{v})\|^2 &= E_2a^2 + 2F_2ab + G_2b^2 \end{aligned}$$

per ogni a, b e questo implica $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$. Abbiamo dunque dimostrato la:

Proposizione 1.9. *Sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo. Le applicazioni lineari df_p sono isometrie di spazi vettoriali (per ogni p) se e solo se esistono coordinate locali su M e N tali che $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ (a meno dei nomi delle variabili).*

ATTENZIONE. Leggiamo bene l'enunciato: la condizione è che *esistono* coordinate locali con proprietà opportune. Il prodotto scalare non dipende dalle basi usate (i coefficienti della matrice dipendono dalle basi) e anche il differenziale è un'applicazione linere che non dipende dalle basi usate (la sua matrice dipende dalle basi).

Quindi il differenziale è una isometria di spazi vettoriali oppure no *indipendentemente* dalle parametrizzazioni locali usate. Quello che dice la proposizione è che, se il differenziale è una isometria, allora è possibile trovare basi in cui le matrici dei due prodotti scalari sono uguali.

Vedremo un esempio specifico di questo fenomeno alla fine del paragrafo.

La Proposizione 1.9 tratta il caso del *differenziale* di un diffeomorfismo. Torniamo ora ai *diffeomorfismi* fra superfici e scriviamo in coordinate locali cosa significhi essere un'isometria. La curva C è data da una funzione $\alpha : [a, b] \to D$ della forma:

$$u_1 = u_1(t), \quad v_1 = v_1(t) \qquad a \le t \le b$$

e quindi su M la curva è data dalla parametrizzazione $\mathbf{x}(\alpha(t))$. La sua immagine su N è data da $f(\mathbf{x}(\alpha(t))) = \mathbf{y}(\bar{f}(\alpha(t)))$. Possiamo scrivere la parametrizzazione $\bar{f}(\alpha(t)) : [a, b] \to E$ come

$$u_2 = u_2(t), \quad v_2 = v_2(t) \qquad a \le t \le b$$

dove naturalmente $(u_2, v_2) = \bar{f}(u_1, v_1)$. La condizione che la curva C e la curva $f(C)$ abbiano la stessa lunghezza si scrive quindi come:

$$\begin{aligned}&\int_a^b \sqrt{E_1(t)u_1'(t)^2 + 2F_1(t)u_1'(t)v_1'(t) + G_1(t)v_1'(t)^2}dt \\ =&\int_a^b \sqrt{E_2(t)u_2'(t)^2 + 2F_2(t)u_2'(t)v_2'(t) + G_2(t)v_2'(t)^2}dt\end{aligned}$$

Da questa uguaglianza è possibile dedurre il seguente importante teorema:

Teorema 1.10. *Un diffeomorfismo $f : M \to N$ è un'isometria se e solo se il differenziale $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ è un'isometria di spazi vettoriali per ogni $p \in M$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che il diffeomorfismo f sia rappresentato in coordinate locali dall'identità ($\bar{f} = \mathrm{id}$). In questo caso le curve C e $f(C)$ hanno la stessa espressione in coordinate locali. Se il differenziale di f è un'isometria, per quello che abbiamo osservato prima si ha $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$. Dunque gli integrali che esprimono le lunghezze di C e $f(C)$ sono identici (a meno dei nomi delle variabili) e quindi f conserva le lunghezze di tutte le curve e cioè f è un'isometria.

Per dimostrare l'implicazione opposta, supponiamo ancora che f sia rappresentato in coordinate locali dall'identità. Allora per ogni parametrizzazione regolare $(u(t), v(t))$ di una curva C su M si ha:

$$\begin{aligned}&\int_a^b \sqrt{E_1(t)u'(t)^2 + 2F_1(t)u'(t)v'(t) + G_1(t)v'(t)^2}dt \\ =&\int_a^b \sqrt{E_2(t)u'(t)^2 + 2F_2(t)u'(t)v'(t) + G_2(t)v'(t)^2}dt\end{aligned}$$

Notiamo che per l'ipotesi fatta su $\bar{f}$ si ha $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, e quindi non usiamo gli indici per distinguere le coordinate locali. Cambiando l'estremo superiore di integrazione, cambia la curva ma poiché f lascia invariata la lunghezza di *tutte* le curve, l'identità precedente vale *per ogni* estremo superiore di integrazione b. Considerando allora l'integrale come una funzione di b e derivando rispetto a b (e sostituendo poi b con t) si ha

$$\begin{aligned} &E_1(t)u'(t)^2 + 2F_1(t)u'(t)v'(t) + G_1(t)v'(t)^2 \\ = &E_2(t)u'(t)^2 + 2F_2(t)u'(t)v'(t) + G_2(t)v'(t)^2 \end{aligned}$$

Questa identità deve valere per tutte le curve e in particolare per le curve della forma

$$u(t) = u_0 + \alpha t, \quad v(t) = v_0 + \beta t, \qquad |t| < \varepsilon$$

dove $(u_0, v_0) \in D$ è arbitrario, α, β sono due numeri reali arbitrari e ε è sufficientemente piccolo (in modo che il segmento descritto da queste equazioni parametriche sia tutto contenuto in D). Calcolando allora per $t = 0$ si ottiene che per ogni α, β si ha:

$$E_1\alpha^2 + 2F_1\alpha\beta + G_1\beta^2 = E_2\alpha^2 + 2F_2\alpha\beta + G_2\beta^2$$

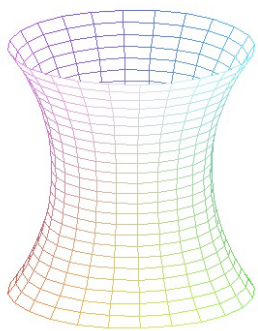
dove E_1, ... sono i valori delle funzioni $E_1(t)$, ... nel punto (u_0, v_0). Questo è possibile solo se $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$, $G_1 = G_2$ e quindi i differenziali df_P sono delle isometrie per ogni P. □

Combinando i risultati fin qui ottenuti (Proposizione 1.9 e Teorema 1.10) abbiamo:

Teorema 1.11. *Due superfici M e N sono isometriche se e solo se è possibile trovare delle coordinate locali su di esse in modo che le prime forme fondamentali delle due superfici coincidano.*

Esempio 1.12. Sia M = catenoide e N = elicoide. Le loro parametrizzazioni sono (vedere Lezione 9, pagg. 7, 8)

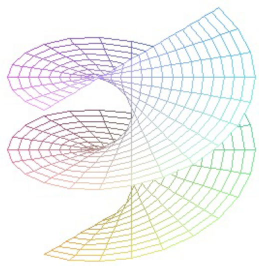
$$\mathbf{x}_M(u,v) = \begin{cases} x = \cosh v \, \cos u \\ y = \cosh v \, \sin u \\ z = v \end{cases}$$



e

$$\mathbf{x}_N(u,v) = \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = u \end{cases}$$

dove abbiamo posto $a = b = 1$ nella parametrizzazione dell'elicoide.



I coefficienti delle prime forme fondamentali sono:

$$\begin{array}{lll} E_M = \cosh^2 v, & F_M = 0, & G_M = \cosh^2 v \\ E_N = 1 + v^2, & F_N = 0, & G_N = 1 \end{array}$$

che sono evidentemente diversi. Ricordando la discussione fatta all'inizio della Lezione 10 sui cambiamenti di coordinate e sul loro effetto sulla prima forma fondamentale utilizziamo l'espressione simbolica

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

e scriviamo

$$ds_M^2 = \cosh^2 v\,du^2 + \cosh^2 v\,dv^2$$

e

$$ds_N^2 = (1 + v^2)\,du^2 + dv^2$$

Consideriamo adesso il cambio di coordinate per l'elicoide

$$u = u_1, \qquad v = \sinh v_1$$

si ha

$$du = du_1, \qquad dv = \cosh v_1\,dv_1$$

e sostituendo nell'espressione del ds_N^2 si ha, nelle coordinate (u_1, v_1)

$$ds_N^2 = (1 + \sinh^2 v_1)\,du_1^2 + \cosh^2 v_1\,dv_1^2 = \cosh^2 v_1\,du_1^2 + \cosh^2 v_1\,dv_1^2$$

che, a meno dei nomi delle variabili, è uguale a ds_M^2. Dunque catenoide ed elicoide sono isometriche.

Esercizio 1.13. Dimostrare che la funzione $u = u_1$, $v = \sinh v_1$ è un cambio di coordinate.

Se abbiamo due superfici per cui, nelle parametrizzazioni assegnate, le prime forme fondamentali coincidono allora le due superfici sono isometriche. Però, se le prime forme fondamentali non coincidono, le superfici potrebbero lo stesso essere isometriche (come abbiamo appena visto per la catenoide e l'elicoide) e non è semplice in generale trovare le (eventuali) coordinate locali che stabiliscono l'isometria. Abbiamo quindi bisogno di un invariante più semplice che sia in grado di stabilire se due superfici NON sono isometriche. Questo invariante è la curvatura Gaussiana, di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

2 Il *Theorema Egregium*

Sia M una superficie regolare orientabile e sia $p \in M$ un suo punto. Consideriamo $dN_p : T_pM \to T_pM$, il differenziale della mappa di Gauss in p e denotiamo la matrice di dN_p nella base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ come

$$dN_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza matriciale $dN_p = -I_p^{-1} II_p$ (Lezione 13, pag. 7) abbiamo le formule (verificare per esercizio e prestare attenzione ai segni):

$$a_{11} = \frac{Ff - Ge}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}$$
$$a_{12} = \frac{Fg - Gf}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}$$

dove

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

e

$$e = N \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = N \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = N \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

sono i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

Per definizione la curvatura Gaussiana K è il determinante dell'endomorfismo $-dN_p$ e quindi è una funzione a valori reali

$$K : M \to \mathbb{R}$$

che *non dipende dalle coordinate locali.* Usando le formule precedenti per calcolare il determinante abbiamo ottenuto la formula:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

che mostra come la curvatura Gaussiana dipenda dalla prima e dalla seconda forma fondamentale. Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la prima forma è invariante per isometrie, ma questo non è vero per la seconda forma (esempio: piano e cilindro). Per ottenere il *Theorema Egregium* faremo vedere che in realtà K dipende solo dai coefficienti della prima forma e dalle loro derivate ed è quindi invariante per isometrie.

Dalla definizione del differenziale della mappa di Gauss si ha $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$, $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$ e usando la matrice calcolata prima scriviamo:

$$N_u = \frac{Ff - Ge}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_v \tag{1}$$

$$N_v = \frac{Fg - Gf}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_v \tag{2}$$

Utilizzeremo queste formule alla fine dei calcoli.

I vettori $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ e inoltre $\mathbf{x}_u \cdot N = \mathbf{x}_v \cdot N = 0$, $N \cdot N = 1$. In modo analogo alle formule di Frenet possiamo scrivere i vettori derivate seconde in questa base:

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN \tag{3}$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN \tag{4}$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN \tag{5}$$

dove i Γ_{ij}^k sono opportune funzioni di u, v che sono detti *simboli di Christoffel* o *coefficienti della connessione.*

Per prima cosa osserviamo che i coefficienti di N che compaiono sono effettivamente i coefficienti della seconda forma fondamentale. Per dimostrarlo basta calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x}_{uu} \cdot N, \ldots$ e usare la definizione di seconda forma fondamentale. Per esempio, si ha

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot N = (\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN) \cdot N = e$$

che è proprio la definizione del coefficiente e. Moltiplicando scalarmente le altre due equazioni con N si ottengono gli altri due coefficienti.

Determiniamo ora i termini Γ_{ij}^k. Derivando rispetto a u e v la relazione $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, si ottiene:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2} E_u, \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \frac{1}{2} E_v$$

e allo stesso modo derivando $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ si ha:

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2} G_u, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2} G_v$$

Deriviamo ora $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$: si ha

$$F_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv}, \qquad F_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv}$$

e usando le relazioni precedenti si ottiene:

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

Moltiplichiamo scalarmente l'equazione (3) per $\mathbf{x}_u$ e per $\mathbf{x}_v$. Ricordando che N è ortogonale a $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ e usando le relazioni precedenti si ottiene il sistema

$$\begin{cases} E\,\Gamma_{11}^1 + F\,\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} E_u \\ F\,\Gamma_{11}^1 + G\,\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

da cui si vede che Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 dipendono solo da E, F, G e le loro derivate prime. Moltiplicando allo stesso modo le equazioni (4) e (5) si ottengono tutti gli altri simboli di Christoffel. Per avere l'espressione esplicita dei simboli di Christoffel in termini di prima forma basta risolvere i sistemi lineari precedenti, per esempio con la formula di Cramer (notiamo che la matrice dei coefficienti del sistema è la matrice della prima forma che è invertibile).

Non scriviamo in dettaglio il risultato perché non ci servirà. L'unica cosa che serve è che tutti i Γ_{ij}^k dipendono solo dalla prima forma fondamentale e dalle sue derivate.

I simboli di Christoffel sono stati ottenuti in modo simile alla curvatura e torsione di una curva e cioè scrivendo le derivate seconde in termini di una base di $\mathbb{R}^3$ formata dalle derivate prime. Il teorema fondamentale della teoria locale delle curve ci assicura che non ci sono restrizioni sulla curvatura e sulla torsione: ogni coppia di funzioni è la coppia (k, τ) di una curva.

Invece, non tutte le funzioni possono essere simboli di Christoffel di una superficie. Oltre l'ovvia condizione $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ (che non abbiamo nemmeno messo in evidenza perché sappiamo che $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ e quindi i relativi coefficienti sono uguali), ci sono altre condizioni che si ottengono considerando derivate miste di ordine superiore.

Di tutte le derivate miste possibili, calcoliamo ora la derivata terza $\mathbf{x}_{uuv}$ e scriviamola in termini della base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$

$$\mathbf{x}_{uuv} = \alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v + \gamma N$$

Possiamo calcolare in due modi, ottenendo lo stesso risultato: $(\mathbf{x}_{uu})_v$ derivando rispetto a v la relazione (3) oppure $(\mathbf{x}_{uv})_u$ derivando rispetto a u la relazione (4). In entrambi i casi metteremo in evidenza solo il coefficiente β di $\mathbf{x}_v$ e tralasceremo gli altri termini. Inoltre scriveremo tutti i termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale come $(\dots)$, senza calcolare la loro espressione esatta.

Prima di iniziare il calcolo, osserviamo che le altre derivate miste possibili e i coefficienti degli altri termini danno delle ulteriori relazioni sui simboli di Christoffel. Per il risultato che ci interessa basta questa. Ce ne sono altre due, dette *equazioni di Mainardi-Codazzi* e si può dimostrare il *Teorema di Bonnet* che afferma che date sei funzioni E, F, G, e, f, g che soddisfano la condizione di Gauss e le equazioni di Mainardi-Codazzi, esiste una unica superficie che ha E, F, G, e, f, g come prima e seconda forma fondamentale. Trovate l'enunciato di questo teorema sul do Carmo alla fine del Capitolo 4-3 e la dimostrazione nell'Appendice al Capitolo 4 oppure sull'Abate-Tovena nel Capitolo 4.9. L'idea della dimostrazione è la stessa del Teorema fondamentale per le curve e cioè scrivere un sistema di equazioni differenziali e risolverlo. C'è una complicazione dovuta al fatto che il sistema da risolvere è un sistema di equazioni alle derivate parziali (rispetto alle variabili u e v), e i relativi teoremi di esistenza e unicità (quando ci sono) sono più difficili da ottenere e di solito non sono discussi al secondo anno di Matematica ma in corsi più avanzati.

Dunque dalla (3) si ha:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_{uu})_v &= \left[\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN\right]_v \\ &= \left(\Gamma_{11}^1\right)_v \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_{uv} + \left(\Gamma_{11}^2\right)_v \mathbf{x}_v + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_{vv} + e_v N + eN_v\end{aligned}$$

A secondo membro ci sono sei addendi: il primo e il quinto sono multipli rispettivamente di $\mathbf{x}_u$ e N e quindi non contribuiscono a β.

Il terzo addendo è un multiplo di $\mathbf{x}_v$ e perciò contribuisce a β, ma il suo contributo è la derivata di un simbolo di Christoffel e quindi dipende solo dalla prima forma.

Consideriamo ora il secondo e quarto addendo: sono multipli di

$$\mathbf{x}_{uv} = \cdots + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + \dots$$

e

$$\mathbf{x}_{vv} = \cdots + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + \dots$$

dove i termini non scritti non contribuiscono a β. Dunque anche il secondo e il quarto addendo contribuiscono a β solo mediante simboli di Christoffel e loro derivate.

Complessivamente il contributo a β del secondo, terzo e quarto addendo è dato da termini che dipendono sono dalla prima forma fondamentale. Invece l'ultimo addendo si scrive, ricordando l'equazione (2):

$$eN_v = e\left(\frac{Fg - Gf}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_u + \frac{Ff - Eg}{EG - F^2}\,\mathbf{x}_v\right)$$

e quindi ha un contributo a β che contiene anche coefficienti della seconda forma fondamentale. Dunque:

$$\boxed{\beta = e\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} + (\text{termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale})}$$

Derivando la (4) rispetto a u e procedendo allo stesso modo per individuare i contributi al coefficiente β si ottiene:

$$\boxed{\beta = f\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} + (\text{termini che dipendono solo dalla prima forma fondamentale})}$$

Uguagliando e portando a secondo membro tutto quello che dipende solo dalla prima forma si ottiene che

$$e\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - f\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = \text{dipende solo dalla prima forma fondamentale}$$

Semplificando si ha:

$$e\frac{Ff - Eg}{EG - F^2} - f\frac{Fe - Ef}{EG - F^2} = -E\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -EK$$

Per ottenere K basta dividere per E (perché $E \neq 0$?) e si ha:

Proposizione 2.1. *La curvatura Gaussiana K può essere scritta mediante una formula che contiene solo i coefficienti della prima forma fondamentale e le loro derivate (prime e seconde).*

e quindi, nelle parole di Gauss (*Disquisitiones*, fine art. 12):

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

L'espressione esatta può essere facilmente(!) trovata esplicitando tutti i calcoli precedenti. Una formula con un po' di raccoglimenti fatti è la seguente:

$$\begin{aligned} K = & -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} \\ & -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\} \end{aligned}$$

Come si vede è piuttosto complicata e non è utile nei calcoli. Questa formula si trova sul Postnikov. Trovate altre formule simili sull'Abate-Tovena (Teorema 4.6.11, pag. 203) e sul do Carmo (Capitolo 4-3, formula (5) a pag. 237): in entrambi i casi K è espresso in termini dei simboli di Christoffel e quindi le formule sono un po' più semplici. Un'altra formula comune (sostanzialmente la stessa data sopra) è la cosiddetta *formula di Brioschi*, che potete trovare su Wikipedia, all'indirizzo `https://it.wikipedia.org/wiki/Theorema_egregium` con una dimostrazione del Theorema Egregium basata su questa formula.

3 La definizione di Gauss di curvatura

La definizione moderna di curvatura è diversa da quella data da Gauss (ma ovviamente equivalente). Gauss usa la geometria e non l'algebra lineare.

Sia S una superficie regolare e sia $N : S \to S^2$ la mappa di Gauss. Sia $R \subset S$ una regione di S. Gauss definisce la *curvatura totale* o *curvatura integra* della regione R come l'area di $N(R)$, la sua immagine sulla sfera unitaria mediante la mappa di Gauss. Questa definizione richieda che la superficie sia orientabile, per avere mappa di Gauss e inolte in questo modo la curvatura viene sempre positiva, perché è un'area.

Gauss poi concentra l'attenzione su un punto $p \in S$ e definisce la *mensura curvaturae* nel punto p come il rapporto fra la curvatura integra (cioè l'area sulla sfera) e l'area sulla superficie di una regione infinitamente piccola intorno al punto p, o come dice Gauss

> *rationem arearum infinite parvarum in superficie curva et in superficie sphaerica sibi muto respondentium*

Sappiamo tutti le parole che si devono usare oggi per dare senso ad una affermazione del genere: si usa un limite (ricordiamo che Gauss scrive prima di Weierstrass). In particolare, possiamo dare una definizione moderna in questo modo: sia $p \in S$ e sia R una regione che contiene p. Possiamo considerare il rapporto delle aree come prima, cioè la *curvatura integra* di R divisa per la sua area e poi prendere il limite quando l'area di R tende a 0:

$$K(p) = \lim_{A(R)\to 0} \frac{A(N(R))}{A(R)}$$

Tralasciando il problema di dire con precisione cosa vuol dire il limite, se scriviamo gli integrali che calcolano il numeratore e il denominatore vediamo che gli integrandi differiscono esattamente per il determinante del differenziale della mappa N e otteniamo la curvatura Gaussiana come l'abbiamo definita noi.

In realtà se calcoliamo le *aree*, la formula di sostituzione degli integrali doppi ha il *valore assoluto* del determinante. Gauss nota che però possiamo considerare l'orientamento sulle due superfici e vedere se N conserva l'orientamento oppure no e assegnare un segno positivo oppure negativo. Questo corrisponde a non prendere il valore assoluto e otteniamo la formula che abbiamo usato.

Gauss usa la sua definizione, fa un po' di calcoli e nell'art. 7 scrive

$$k = \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}$$

dove (x, y) sono le coordinate (locali) del punto p sulla superficie e (X, Y) sono le coordinate (locali) del punto sulla sfera $N(p)$, immagine di p per la mappa di Gauss: esattamente $\det dN_p$.

Trovate una discussione completa di questi argomenti sul do Carmo alla fine del Capitolo 3-3, pagg. 168-170.